Gaussovo určování dráhy nebeských těles

Vladimír Štefl
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Kotlářská 267/2, 611 37 Brno; stefl@physics.muni.cz

1. Objev Cerery

Historie moderního výzkumu stavby a složení Sluneční soustavy je stará necelá tři století. Ve druhé polovině 18. století – r. 1766 – německý matematik *Johann Daniel Titius* (1729–1796) [1] objevil závislost průměrné vzdálenosti planety od Slunce v astronomických jednotkách, původně vyjádřenou ve tvaru a = $(n + 4)/10$, kde $n = 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96$. V r. 1772 tento vztah převzal a doplnil německý astronom *Johann Elert Bode* (1747–1826) [2] a dnes ho známe jako tzv. Titiovu–Bodeovu řadu ve tvaru $a = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^n$, kde $n = -\infty, 0, 1, 2, 3$ …

Tuto řadu pro $n = 6$ v podstatě splňovala velikost velké poloosy $a = 19{,}2$ au dráhy Uranu, určená po jeho objevu r. 1781 anglickým astronomem *Williamem Herschelem* (1738–1822). Titiova–Bodeova řada udávala hodnotu a = 19,6 au.

Pro $n = 3$, $a = 2{,}8$ au ve zmiňované řadě neexistovalo žádné těleso. Astronomové vyslovili předpoklad, že mezi Marsem a Jupiterem by měla existovat další planeta. Francouzský matematik a astronom *Joseph Jérôme Lalande* (1732–1807) navrhl vytvořit sdružení astronomů, následně nazvané *„Himmelspolizei“* (*Nebeská policie).* Pod koordinačním vedením *Franze Xavera von Zacha* (1754–1832), viz obr. 1, maďarského matematika, geodeta a astronoma působícího v německém městě Gotha, části Seeberg, započala r. 1799 celoevropská astronomická pozorovací kampaň za účelem jejího nalezení. Bylo do ní zapojeno dvacet čtyři pozorovatelů z Evropy, např. J. E. Bode, W. Herschel, N. Maskelyne, Ch. Messier, H. W. M. Olbers, J. H. Schröter. Posledně jmenovaný Schröter byl zvolen prezidentem sdružení, Zach sekretářem. Ekliptiku astronomové rozdělili na dvacet čtyři částí po 15°, přičemž zkoumali především objekty ±7° podél ní.

Obr. 1 Franz Xaver von Zach

Obr. 2 Giuseppe Piazzi

Sicilský matematik a astronom z Palerma *Giuseppe Piazzi* (1746–1826), viz obr. 2, byl pozván ke členství v *Nebeské policii,* ale dopis s pozvánkou k němu do 1. ledna 1801 nestačil dorazit. V tento den Piazzi ve 20 h 43 min místního času nalezl na obloze objekt, který se během noci posunul o 4′ vzhledem k hvězdnému poli v pozadí k severozápadu a během dalších dnů se dále přemísťoval. Piazzi popsal svůj objev italskému astronomovi *Barnabu Orianimu* (1752–1832) v dopisu [3] z 24. ledna r. 1801 slovy: *„Pozoroval jsem 1. ledna poblíž ramena Býka objekt s hvězdnou velikostí osmé magnitudy, který se dalšího večera 2. ledna posunul o 3′30″ přibližně k severu o 4′ ke znamení Berana“*…

Pozorování Piazzi prováděl do 11. února r. 1801. Pro nemoc ho přerušil a mezitím se objekt přiblížil ke Slunci, což znemožňovalo jeho sledování. Zkoumal objekt čtyřicet jedna nocí, získal údaje o devatenácti úplných pozorováních, v nichž zachytil oblouk vzhledem ke středu Země o úhlové velikosti 3°. Původně objekt považoval za kometu, což sdělil v citovaném dopisu [3]: *„… já bych tu hvězdu označil za kometu, avšak nevykazuje žádnou mlhovinu…“* Objekt nazval *Ceres Ferdinandea* na počest bohyně úrody a mecenáše – sicilského a neapolského krále Ferdinanda IV., který financoval výstavbu hvězdárny v Palermu, na níž Piazzi prováděl pozorování. Okolnosti svého objevu autor podrobně popsal v [4]. Po znovunalezení objektu ho astronomové klasifikovali jako osmou planetu Sluneční soustavy a zvolili pro ni název *Ceres*. Po roce 1850 se změnil její statut na planetku a v roce 2006 na trpasličí planetu.

Vraťme se do poloviny r. 1801, kdy se astronomové marně pokoušeli objevit ztracený objekt. Klíčovou roli v nalezení Cerery sehrál *Monatliche Correspondenz (MC) zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde* – časopis *Měsíční korespondence na podporu geografie a astronomie.* V *MC* [5] editor Zach nejprve v červnu r. 1801 oznámil astronomické veřejnosti Piazziho objev neznámého objektu, současně uvedl některé vybrané pozorovací údaje. Kompletní a upřesněný Piazziho soubor publikoval Zach v září 1801 v *MC* [6].

V říjnu r. 1801 Zach v *MC* [7] informoval o neúspěšných pokusech výpočtů dráhy objektu. Francouzský matematik a astronom *Johann Karl Burckhardt* (1773–1825), narozený v Německu, předpokládal jeho eliptickou dráhu. Německý lékař a astronom *Heinrich Wilhelm Matthäus Olbers* (1738–1822) uvažoval kruhovou dráhu. Oba astronomové nesprávně předpokládali, že Ceres se v době Piazziho pozorování nacházela v blízkosti perihélia, což neodpovídalo skutečnosti.

V patové situaci v září r. 1801 Zach požádal německého matematika, fyzika a astronoma *Carla Friedricha Gausse* (1777–1855), viz obr. 3, o výpočet dráhy hledaného objektu. Gauss se počátkem 19. století vedle hlavní matematiky zabýval intenzivně také astronomií, věnoval se jí zejména prvních dvacet roků po absolvování univerzity. Od r. 1807 byl profesorem astronomie na univerzitě v Göttingenu a ředitelem hvězdárny tamtéž. Prováděl vlastní pozorování komet, planetek

Obr. 3 Carl Friedrich Gauss

a hvězd a získané údaje zpracovával matematickými metodami a průběžně publikoval.

Před Gaussem v souvislosti s hledáním ztraceného objektu stál úkol rychlého vytvoření vhodné výpočetní metody pro nalezení jeho dráhy, využitelné širokým okruhem astronomů. Vymyslel ji v průběhu podzimu r. 1801 a jako zručný počtář provedl několik úspěšných výpočtů dráhových elementů. Původně v nich použil pouze údaje ze tří pozorování vybraných na počátku, uprostřed a na konci pozorovací řady ze záznamů v *MC* [6], viz obr. 4. Zachycovaly souřadnice geocentrických délek, šířek a časů pozorování, které Gauss přepočítal na ekliptikální délky a šířky. Soubor upravoval, méně přesná pozorování vyřazoval a nebral je do úvahy – viz obr. 5 z [8].

V průběhu září až prosince r. 1801 provedl Gauss celkem pět výpočtů dráhových elementů pozorovaného objektu. V každém z nich stanovil hodnoty délek

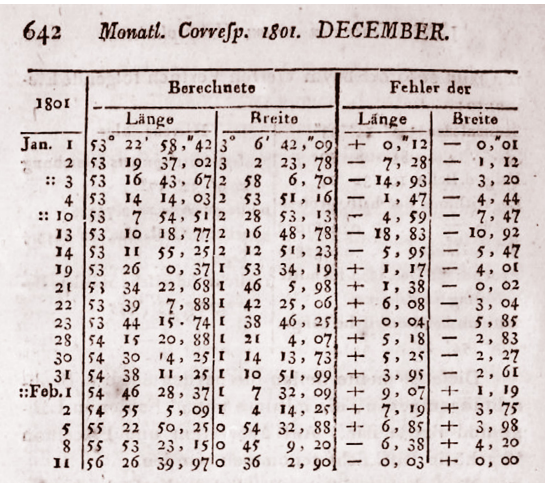
280 *Monatl. Corresp. 1801.* SEPTEMBER.

Beobachtungen des zu Palermo d. 1 Jan. 1801 von Prof. *Piazzi* neu entdeckten Gestirns.

1801		Mittlere Sonnen-Zeit	Gerade Aufsteig. in Zeit	GeradeAufsteigung in Graden	Nördl. Abweich.	Geocentrische Länge	Geocentr. Breite	Ort der Sonne + 20″ Aberration	Logar. d. Distanz ☉ ♁
		St ′ ″	St ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	Z ° ′ ″	° ′ ″	Z ° ′ ″	
Jan.	1	8 43 17,8	3 27 11, 25	51 47 48, 8	15 37 43, 5	1 23 22 58, 3	3 6 42, 1	9 11 1 30, 9	9, 9926156
	2	8 39 4,6	3 26 53, 85	51 43 27, 8	15 41 5, 5	1 23 19 44, 3	3 2 24, 9	9 12 2 28, 6	9, 9926317
	3	8 34 53,3	3 26 38, 4::	51 39 36, 0	15 44 31, 6	1 23 16 58, 6	2 58 9, 9	9 13 3 26, 6	9, 9926324
	4	8 30 42,1	3 26 23, 15	51 35 47, 3	15 47 57, 6	1 23 14 15, 5	2 53 55, 6	9 14 4 24, 9	9, 9926418
	10	8 6 15,8	3 25 32, 1::	51 23 1, 5	16 10 32, 0	1 23 7 59, 1	2 29 0, 6	9 20 10 17, 5	9, 9927641
	11	8 2 17,5	3 25 29, 73	51 22 26, 0	. . . .	. . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .
	13	7 54 26,2	3 25 30, 30	51 22 34, 5	16 22 49, 5	1 23 10 37, 6	2 16 59, 7	9 23 12 13, 8	9, 9928490
	14	7 50 31,7	3 25 31, 72	51 22 55, 8	16 27 5, 7	1 23 12 1, 2	2 12 56, 7	9 24 14 13, 5	9, 9928809
	17	. . . . .	. . . .	. . . . . .	16 40 13, 0	. . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .
	18	7 35 11,3	3 25 55, ::	51 28 45, 0	. . . .	. . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .
	19	7 31 28,5	3 26 8, 15	51 32 2, 3	16 49 16, 1	1 23 25 59, 2	1 53 38, 2	9 29 19 53, 8	9, 9930607
	21	7 24 2,7	3 26 34, 27	51 38 34, 1	16 58 35, 9	1 23 34 21, 3	1 46 6, 0	10 1 20 40, 3	9, 9931434
	22	7 20 21,7	3 26 49, 42	51 42 21, 3	17 3 18, 5	1 23 39 1, 8	1 42 28, 1	10 2 21 32, 0	9, 9931886
	23	7 16 43,5	3 27 6, 90	51 46 43, 5	17 8 5, 5	1 23 44 15, 7	1 38 52, 1	10 3 22 22, 7	9, 9932348
	28	6 58 51,3	3 28 54, 55	52 13 38, 3	17 32 54, 1	1 24 15 15, 7	1 21 6, 9	10 8 26 20, 1	9, 9935062
	30	6 51 52,9	3 29 48, 14	52 27 2, 1	17 43 11, 0	1 24 30 9, 0	1 14 16, 0	10 10 27 46, 2	9, 9936332
	31	6 48 25,4	3 30 17, 25	52 34 18, 8	17 48 21, 5	1 24 38 7, 3	1 10 54, 6	10 11 28 28, 5	9, 9937007
Febr.	1	6 44 59,9	3 30 47, 2::	52 41 48, 0	17 53 36, 5	1 24 46 19, 3	1 7 30, 9	10 12 29 9, 6	9, 9937703
	2	6 41 35,8	3 31 19, 06	52 49 45, 9	17 58 57, 5	1 24 54 57, 9	1 4 10, 5	10 13 29 49, 9	9, 9938423
	5	6 31 31,5	3 33 2, 70	53 15 40, 5	18 15 1, 0	1 25 22 43, 4	0 54 28, 9	10 16 31 45, 5	9, 9940751
	8	6 21 39,2	3 34 58, 50	53 44 37, 5	18 31 23, 2	1 25 53 29, 5	0 45 5, 0	10 19 33 33, 3	9, 9943276
	11	6 11 58,2	3 37 6, 54	54 16 38, 1	18 47 58, 8	1 26 26 40, 0	0 36 2, 9	10 22 35 11, 4	9, 9945823

Bis

Obr. 4 Záznam Piazziho pozorování v Monatliche Correspondenz



642 *Monatl. Corresp. 1801.* DECEMBER.

1801	Berechnete Länge			Berechnete Breite			Fehler der Länge	Fehler der Breite
Jan. 1	53°	22′	58,″42	3°	6′	42,″09	+ 0,″12	— 0,″01
2	53	19	37, 02	3	2	23, 78	— 7, 28	— 1, 12
:: 3	53	16	43, 67	2	58	6, 70	— 14, 93	— 3, 20
4	53	14	14, 03	2	53	51, 16	— 1, 47	— 4, 44
:: 10	53	7	54, 51	2	28	53, 13	— 4, 59	— 7, 47
13	53	10	18, 77	2	16	48, 78	— 18, 83	— 10, 92
14	53	11	55, 25	2	12	51, 23	— 5, 95	— 5, 47
19	53	26	0, 37	1	53	34, 19	+ 1, 17	— 4, 01
21	53	34	22, 68	1	46	5, 98	+ 1, 38	— 0, 02
22	53	39	7, 88	1	42	25, 06	+ 6, 08	— 3, 04
23	53	44	15. 74	1	38	46, 25	+ 0, 04	— 5, 85
28	54	15	20, 88	1	21	4, 07	+ 5, 18	— 2, 83
30	54	30	14, 25	1	14	13, 73	+ 5, 25	— 2, 27
31	54	38	11, 25	1	10	51, 99	+ 3, 95	— 2, 61
::Feb. 1	54	46	28, 37	1	7	32, 09	+ 9, 07	+ 1, 19
2	54	55	5, 09	1	4	14, 25	+ 7, 19	+ 3, 75
5	55	22	50, 25	0	54	32, 88	+ 6, 85	+ 3, 98
8	55	53	23, 15	0	45	9, 20	— 6, 38	+ 4, 20
11	56	26	39, 97	0	36	2, 90	— 0, 03	+ 0, 00

Obr. 5 Ekliptikální délky a šířky Cerery vypočítané Gaussem – Monatliche Correspondenz

afélia a výstupného uzlu, úhlu dráhového sklonu, rádiusvektoru (polohového heliocentrického vektoru), oběžné doby a numerické excentricity dráhy. Obdržené hodnoty jsou zachyceny v tabulce [3]. Z jejich porovnání lze vyvodit, že druhý výpočet vedl k prakticky stejnému dráhovému sklonu, ale s mírně změněnou délkou výstupného uzlu. První tři série výpočtů odhalily souvislost změn rádiusvektoru s délkou výstupného uzlu.

Pro tzv. čtvrtý výpočet dráhy Gauss zvolil pozorovací údaje z 1. ledna, 21. ledna a 11. února z r. 1801, viz tabulka.

	rektascenze	deklinace	střední sluneční čas
1. ledna	51° 47′ 49″	15° 37′ 44″	8 hod 43 minut 17,8 s
21. ledna	51° 38′ 34″	16° 58′ 36″	7 hod 24 minut 2,7 s
11. února	54° 16′ 38″	18° 47′ 59″	6 hod 11 minut 58,2 s

V prosinci r. 1801 Zach v *MC* [9] uveřejnil Gaussovy výsledky hodnot dráhových elementů ze zmiňovaného čtvrtého výpočtu: velká poloosa a = 2,7673 au, numerická excentricita e = 0,0825 a sklon dráhy i = 10° 36′ 57″. Uvedené hodnoty se příliš neliší od soudobých moderních. Pro hledání na obloze Gauss propočítal rovněž předpokládané ekliptikální souřadnice na dny 25. 11. – 31. 12. 1801 v intervalech šesti dnů. S jejich pomocí Zach vytipoval při pozorování oblohy v noci ze 7. na 8. prosince r. 1801 čtyři objekty, v jednom z nich Olbers identifikoval 1. ledna r. 1802 hledanou Ceres. Poloha se shodovala s Gaussovým výpočtem na 20′.

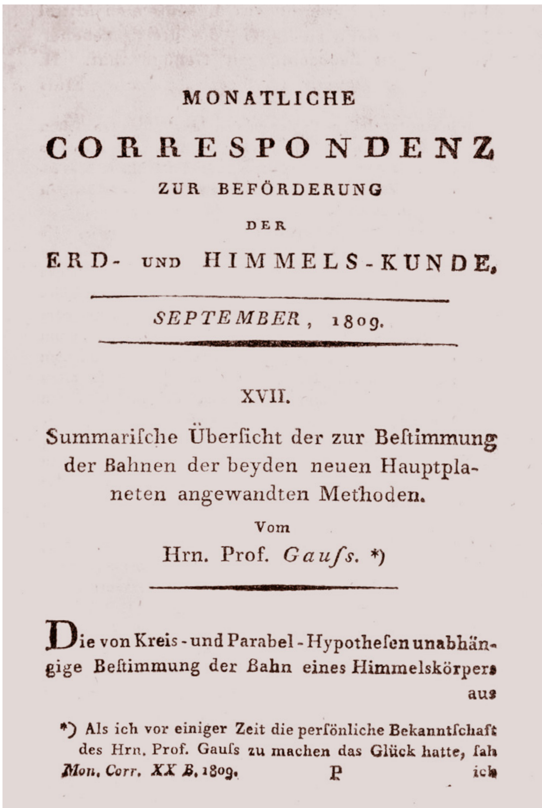
Stručně charakterizujme východiska a sled Gaussových úvah v r. 1801. Z pozorování věděl, že Ceres se pohybovala mezi 1. a 11. lednem r. 1801 retrográdně. Tento pohyb a sledovaná smyčka byly způsobeny rozdílnou oběžnou rychlostí Země a Ceres kolem Slunce, oběžná rychlost Země je větší. Analýza zkoumaného pohybu byla dále komplikována tím, že obě tělesa obíhala v různých dráhových rovinách. V průběhu původních Piazziho pozorování opsala Ceres zhruba necelých 9° své dráhy kolem Slunce, postupně narůstala její vzdálenost od ekliptiky v rozmezí 15° → 18°.

Nejprve zásluhou své velké představivosti promyslel do všech důsledků jednotlivé kroky celkového prostorového řešení, včetně započtení relativnosti pohybu hledané Cerery, kterou Piazzi pozoroval z pohybující se Země. Až po vyjasnění všech postupných kroků celkového řešení provedl numerické výpočty. Vyžadovaly i od výjimečně rychlého počtáře, kterým Gauss byl, hodiny práce.

Vytvořil metodu opírající se především o geometrické postupy. Vstupními údaji pro výpočty byly geocentrické souřadnice, rektascenze a deklinace při třech pozorováních, současně s jejich časy. Časový interval mezi nimi byl mnohem menší než doba oběhu Cerery. Polohy nezachycovaly skutečnou dráhu v prostoru ani jednoduchou projekci dráhy na světovou sféru vzhledem k současnému pohybu Země i Cerery. Proto Gauss stejně jako německý matematik a astronom *Johannes Kepler* (1571–1630) v *Nové astronomii* [9] nejprve propočítal přesnou polohu Země na její dráze v okamžicích pozorování, vzdálenost a polohu vzhledem k Slunci.

Dokladem Gaussových výsledků v roce 1801 byly stručné záznamy z jeho deníku [10], kde k září uvedl sdělení o vytvoření nové, maximálně jednoduché a efektivní metody nalezení dráhových elementů těles. V říjnu téhož roku zapsal poznámku o objevu velkého počtu nových vzorců, pro teoretickou astronomii velmi vhodných.

Dílčí informace o historické metodě výpočtu dráhy Ceres ze tří pozorování Gauss uvedl ve svých dopisech Olbersovi v průběhu r. 1802. Celkový postup publikoval v září r. 1809 v *MC* [11] pod názvem *Summarische Übersicht der zur Bestimmung der Bahnen der beyden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden*, titulní strana obr. 6. Američtí matematici Donald Alan Teets a Karen Whiteheadová analyzovali v [12] *Souhrnný přehled* a charakterizovali Gaussův postup: ze tří pozorování délek a šířek nových planet určil dva ze tří rádiusvektorů, zachycujících polohu ve dvou časech; z jejich znalosti pak stanovil šest dráhových elementů.



MONATLICHE
CORRESPONDENZ
ZUR BEFÖRDERUNG
DER
ERD- UND HIMMELS-KUNDE.

SEPTEMBER, 1809.

XVII.

Summarische Übersicht der zur Bestimmung der Bahnen der beyden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden.

Vom
Hrn. Prof. *Gauss.* *)

Die von Kreis- und Parabel-Hypothesen unabhängige Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus

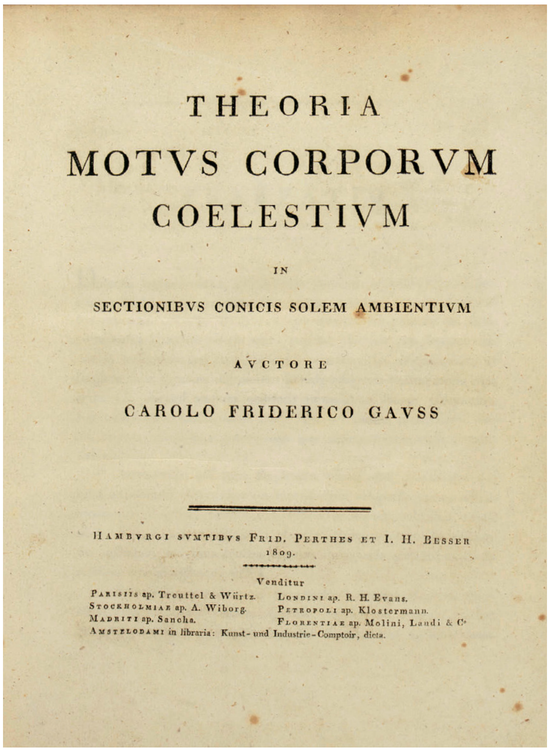
*) Als ich vor einiger Zeit die persönliche Bekanntschaft des Hrn. Prof. Gauss zu machen das Glück hatte, sah
Mon. Corr. XX B. 1809. P ich

Obr. 6 Titulní strana *Summarische Übersicht* v Monatliche Correspondenz.

Gauss ve výpočtech zvolil za dvě neznámé veličiny dráhový sklon i a délku výstupného uzlu Ω.

2. Teorie pohybu nebeských těles

Přejděme k rozboru Gaussovy metody určování drah těles, obsažené ve spisu sepsaném původně v německém jazyce – *Theorie der Bewegung, der in Kegelschnitten sich um die Sonne bewegenden Himmelskörper* z roku 1806. V latinském jazyce z r. 1809 nesla název *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicus solem ambientium* [13] – *Teorie pohybu nebeských těles pohybujících se kolem Slunce po kuželosečkách*, titulní list viz obr. 7. Spis měl téměř tři sta stran včetně příloh. Je symbolické, že vyšel přesně dvě stě let po vydání *Nové astronomie*, na kterou obsahově velmi těsně navázal. Gauss zobecnil Keplerovy myšlenky a provedl k nim konkrétní výpočty kuželosečkových drah těles při pohybu ve Sluneční soustavě. Nejenom Cerery, ale také již tehdy známých dalších – Pallase, Juna, Vesty a rovněž komet. V případě Cerery Gauss vycházel nejen z pozorovacích údajů Piazziho, nýbrž i jiných astronomů – Olberse (1805), Karla Ludwiga Hardinga (1806) a Friedricha Wilhelma Bessela (1806). Jejich pozorování pokrývala delší pozorovací řadu (časově dvě stě šedesát nocí), a proto umožňovala přesnější výpočet dráhy.


THEORIA
MOTVS CORPORVM
COELESTIVM
IN
SECTIONIBVS CONICIS SOLEM AMBIENTIVM
AVCTORE
CAROLO FRIDERICO GAVSS

HAMBVRGI SVMTIBVS FRID. PERTHES ET I. H. BESSER
1809.

Venditur
PARISIIS ap. Treuttel & Würtz. LONDINI ap. R. H. Evans.
STOCKHOLMIAE ap. A. Wiborg. PETROPOLI ap. Klostermann.
MADRITI ap. Sancha. FLORENTIAE ap. Molini, Landi & C°
AMSTELODAMI in libraria: Kunst- und Industrie-Comptoir, dicta.

Obr. 7 Titulní strana *Theoria motus corporum coelestium.*

2.1. Gaussova první rovnice

V matematickém úvodu nejprve objasníme novou a zásadní autorovu myšlenku, vyjádřenou Gaussovou první rovnicí. Pro větší srozumitelnost výkladu použijeme novodobou matematickou vektorovou symboliku.

Gauss předpokládal pohyb pozorovaného tělesa po kuželosečkové dráze s ohniskem ve Slunci. Jeho dráhová rovina protínala dráhovou rovinu Země v přímce procházející středem Slunce. Znal pozorovací směry na těleso, nikoliv jeho geocentrické a heliocentrické vzdálenosti. Uběhlému úseku dráhy tělesa mezi dvěma pozorováními odpovídal určitý sektor plochy, jehož velikost Gauss potřeboval matematicky vyjádřit. Zjednodušené nahrazení plochou trojúhelníku, vymezeného Sluncem, oběma rádiusvektory a tětivou spojující jejich koncové body, se ukázalo nedostatečně přesné. S rostoucím úhlem mezi počátečním a koncovým rádiusvektorem se zvětšoval rozdíl mezi oběma plochami.

Ve zkoumaném problému dráhy Cerery předpokládal Gauss eliptickou dráhu, zjišťoval tedy poměr ploch eliptického sektoru a zmiňovaného trojúhelníku. Při pohybu podle Keplerových zákonů se Slunce nacházelo v rovině dráhy tělesa. Rádiusvektory tělesa (polohové heliocentrické vektory) ležící v jedné rovině označil Gauss $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$. Rádiusvektor ve středním časovém okamžiku pozorování vyložil jako kombinaci dvou zbývajících $\boldsymbol{r}_2 = n_1\boldsymbol{r}_3 + n_3\boldsymbol{r}_3$, což odpovídalo volbě údajů z prvního a třetího pozorování. Odvodil $\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3 = n_1(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3)$, $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = n_3(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3)$ kde

$$n_1 = \frac{|r_2 \times r_3|}{|r_1 \times r_3|}, \quad n_3 = \frac{|r_1 \times r_2|}{|r_1 \times r_3|}.$$

Zavedl

$$n_1 = \frac{S_{t1}}{S_{t2}}, \quad n_3 = \frac{S_{t3}}{S_{t2}},$$

kde S_t označovalo plochy trojúhelníků, n_1 a n_3 jejich poměr. Z časových údajů t_1, t_2, t_3 Gauss zjistil časové intervaly mezi pozorováními. Pozorovaný úsek – oblouk dráhy – byl vzhledem k blízkosti časů pozorování malý.

Plochu eliptického sektoru vymezenou dvěma rádiusvektory $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_3$ a eliptickým obloukem vyjádřil vztahem

$$S_S = \tfrac{1}{2}\sqrt{GM_S p}\,\Delta t\,,$$

kde *semi-latus rectum* byl $p = a(1 - e^2)$ a Δt byl časový interval přechodu úseku dráhy mezi koncovými body r_1 a r_3. Plochu trojúhelníka tvořeného r_1, r_3 a tětivou mezi jejich koncovými body, se středovým úhlem mezi nimi Δv, zachytil vztahem $S_t = ½\ r_1\ r_3 \sin\Delta v$. Poměr ploch sektoru a trojúhelníku Gauss popsal veličinou

$$\eta = \frac{\sqrt{GM_S p}\ \Delta t}{r_1\, r_3\, sin\Delta v}\,, \qquad (1)$$

z definice $\eta > 1$.

Veličina η závisela na geometrii prostorové situace, na vzdálenosti tělesa od Slunce a úhlu mezi oběma rádiusvektory, charakterizovala zakřivení dráhy. Umožňovala výpočet korekčních parametrů a z nich určení rozdílu obou výše zmiňovaných ploch a následné stanovení hledaných ploch sektorů.

Při malých obloucích drah platil pro plochy sektorů odpovídajících příslušným plochám trojúhelníků vztah úměrnosti $S_{si} = \eta_i\, S_{ti}$, $i = 1, 2, 3$. Podle Keplerova zákona ploch bylo S_{si} úměrné τ_i, které bylo definováno vztahy

$$\tau_1 = \sqrt{GM_S}\,(t_3 - t_2),\ \tau_2 = \sqrt{GM_S}\,(t_3 - t_1),$$
$$\tau_3 = \sqrt{GM_S}\,(t_2 - t_1).$$

Interval τ_1 vznikl mezi polohami rádiusvektorů r_2 a r_3 atd. Po dosazení obdržel vztahy

$$n_1 = \frac{\eta_2}{\eta_1}\ .\ \frac{\tau_1}{\tau_2}\,,\ n_3 = \frac{\eta_2}{\eta_3}\ .\ \frac{\tau_3}{\tau_2}\,,$$

které zachycují poměry ploch trojúhelníků a časové intervaly mezi pozorováními. V prvním přiblížení Gauss položil $\eta_2/\eta_1 \to 1$ a $\eta_2/\eta_3 \to 1$ a plochy sektorů nahradil plochami odpovídajících trojúhelníků, což vedlo k $n_1 \approx \tau_1/\tau_2$, $n_3 \approx \tau_3/\tau_2$. Prostřednictvím poměrů n_1 a n_3 vyjádřil tzv. Gaussovy parametry – veličiny P a Q, jak dále ukážeme.

Místo koeficientů n_i Gauss použil při výpočtu veličinu η, jejíž zavedení bylo výhodné, neboť mohl předběžně zadat její přibližnou hodnotu, zpravidla blízkou jedné. Nalezl ji prostřednictvím pozorovaných poloh tělesa a časových intervalů pozorování.

Ve spisu [13] Gauss vyjádřil η zpravidla v závislosti na změnách středového úhlu Δv, odpovídajících excentrické anomálii ΔE. Přesný výpočet η se opíral o rovnice, které Gauss řešil iteracemi, přímé řešení neexistovalo. Jednalo se o dvě nezávislé rovnice pro η a změnu excentrické anomálie ΔE vyplývající z upravené Keplerovy rovnice. Za výchozí hodnotu dosazoval $\eta \rightarrow 1$. V prvních výpočtech z historického Piazziho pozorování použil pro Cereru podle australského astronoma Clifforda Cunnighama (1955) [3] $\eta = 1{,}004\,3$. Následně řešil první rovnici pro ΔE a obdrženou hodnotu dosadil do druhé rovnice k získání přesnější hodnoty η. Popsaný postup konvergoval rychle, jestliže η se blížilo jedné a pokud rozdíly rádiusvektorů byly dostatečně velké.

Umocněním rovnice (1) obdržel

$$\eta^2 = \frac{GM_S p\,\Delta t^{\,2}}{(r_1\, r_3\, sin\Delta v)^2}.$$

Zavedením pomocných výrazů m, l a g, které jsou funkcemi r_1, r_3, $\cos\Delta v$, Δt, získal vztah

$$\eta^2 = \frac{m^2}{l + sin^2\frac{1}{2}g}, \tag{2}$$

označovaný jako tzv. první Gaussova rovnice. V ní jsou neznámými proměnnými η a g. Bližší výklad provedeme v rozboru k čl. 88.

V následujícím komentáři k obsahu spisu jsme použili označení veličin odpovídající původnímu latinskému textu [13], zachovanému v německém [14] i anglickém překladu [15]. Z toho důvodu symbol g, používaný výše ve vysvětlujícím výkladu pro úhel, v Gaussově původním textu označoval plochu vymezenou úhlem.

Spis *Theoria motus* se skládal ze dvou knih, přičemž každá měla čtyři hlavy. První kniha s názvem *Obecné vztahy mezi veličinami, kterými je pohyb nebeských těles kolem Slunce definován* byla úvodním textem k problematice stanovení drah. Druhá kniha *Zkoumání drah nebeských těles z geocentrických pozorování* popisovala detailní řešení a podstatné zpřesnění výpočtů drah.

2.2. První kniha

V úvodu Gauss specifikoval cíl řešení – *„k určení dráhy nebeského tělesa, bez jakéhokoliv hypotetického předpokladu, z pozorování nepokrývajících velký časový interval a nedovolující výběr z hlediska aplikace speciálních metod“*. Upřesnil, že předložený postup výpočtu drah je značně zdokonalený, odlišný od původního z roku 1801. Připomněl, že od uplatnění první metody provedl mnoho velkých změn, a proto stěží zůstal zbytek podobnosti mezi metodou, kterou byla Ceres poprvé propočítána, a nyní předkládanou.

Pohled od hradeb Göttingenu k observatoři, 1835.
Autor: Friedrich Besemann

Do první hlavy *Vztahy příslušející jednotlivé poloze na dráze*, obsahující čl. 1–46, umístil základní pojmy, provedl opakování trigonometrických vztahů nezbytných ke studiu pohybu těles. Odvodil polohy těles v určitém čase na eliptických, parabolických a hyperbolických kuželosečkových drahách. Nebeská tělesa pokládal za matematické body, jejichž pohyb probíhá podle zákonů uvedených v čl. 1:

1. Pohyb každého nebeského tělesa se odehrává ve stálé rovině procházející středem Slunce.
2. Dráha opisovaná tělesem je kuželosečka, jejíž ohnisko se nachází ve středu Slunce.
3. Pohyb probíhá po dráze tak, že plochy výsečí opisované kolem Slunce v různých časových intervalech jsou jim úměrné. Proto pokud plochy sektorů a časy podělíme, v každém jednotlivém podílu obdržíme konstantní hodnotu.
4. Čtverce těchto hodnot jsou pro různá tělesa obíhající kolem Slunce úměrné součinu parametrů jimi opisovaných drah, součtu hmotností Slunce a pohybujících se těles.

Poslední dva zmiňované zákony vyjádřil jedním vztahem. Zavedl parametry $2p$, tzv. *latus rectum*, popisující kuželosečkový řez, μ hmotnost tělesa při jednotkové hmotnosti Slunce, ½g plochu opsanou průvodičem tělesa v čase t při oběhu kolem Slunce a vytvořil tzv. *Gaussovu gravitační konstantu*

$$\frac{g}{t\,\sqrt{p}\,\sqrt{1+\mu}}.$$

Její význam spočíval v tom, že byla určena mnohem přesněji než gravitační konstanta. Konkrétní numerický výpočet provedl pro soustavu Slunce–Země, která už byla dobře známá. Za jednotkovou vzdálenost zvolil velikost velké poloosy dráhy Země kolem Slunce a za jednotku času střední sluneční den. Konstatoval, že plocha celé elipsy opisované Zemí je $\pi\sqrt{p}$, a použil zjednodušení konstanty na

$$\frac{2\pi}{t\sqrt{1+\mu}}.$$

Dosadil $t = 365{,}256\,383\,5$ dne, $\mu = 1/354\,710$ slunečních hmotností a obdržel $k = 0{,}017\,202\,098\,95$ *rad*.

Moderní soudobá hodnota je $k = 0{,}017\,202\,097\,89$ *rad*, rozměr v astronomii používaných jednotkách je

$$au^{\frac{3}{2}}\, M_S^{-\frac{1}{2}}\; st\check{r}ed.\,slun.\,den^{-1}.$$

Gaussova konstanta byla odvozena autorem pro soustavu Slunce–Země, která je velmi dobře známá. Obdobně ji však lze odvodit pro jakákoliv tělesa obíhající kolem Slunce.

V čl. 2 Gauss připomněl, že vycházel z předpokladu pohybu těles kolem Slunce podle Newtonova gravitačního zákona. Rovnice kuželosečkového řezu formuloval v čl. 3, výpočet pravé anomálie a rádiusvektoru pohybujícího se tělesa popsal v čl. 8. V čl. 11 se zabýval řešením Keplerovy rovnice. Odmítl matematicky nepraktické řešení prostřednictvím nekonečných řad, které navrhl francouzský matematik, fyzik a astronom *Joseph Louis Lagrange* (1736–1813). Počítal pravou anomálii a rádiusvektor ze střední anomálie vlastním postupem s použitím logaritmických výpočtů. Vztahy vyjadřující polohu tělesa vyložil postupně pro dráhu v čl. 6–17 eliptickou, v čl. 18–20 parabolickou a v čl. 21–29 hyperbolickou. V případě posledních dvou zmiňovaných drah Gauss vyjadřoval úhel pravé anomálie od perihélia, nikoliv afélia, jak původně zavedl Kepler v *Nové astronomii* [11] pro eliptické dráhy. Proto při řešení Keplerovy rovnice v čl. 32 použil tvar $M = E - e \sin E$. Tento způsob zápisu historicky poprvé zavedl švýcarský matematik, fyzik a astronom *Leonhard Euler* (1707–1783).

S výpočty byla spojena pravidla šíření chyb v nich, což si Gauss jasně uvědomoval. Proto v čl. 30–32 rozebral jak jejich teorii, tak i praxi. V příloze spisu uvedené tabulky dekadických logaritmů jsou sedmimístné, odpovídající přesnosti výpočtů úhlů 0,1′, což bylo adekvátní přesnostem na počátku 19. století. V článku 31 Gauss explicitně uvedl, že maximální chyba ω při použití logaritmů z tabulek činí polovinu poslední číslice, tj. 0,000 000 05. Za pomocí řešení rovnice čtvrtého stupně v čl. 32 provedl konkrétní výpočet maximální chyby pro hyperbolickou dráhu. Do čl. 35–43 Gauss zařadil iterační metodu určování pravé anomálie v a rádiusvektoru r ze vztahů

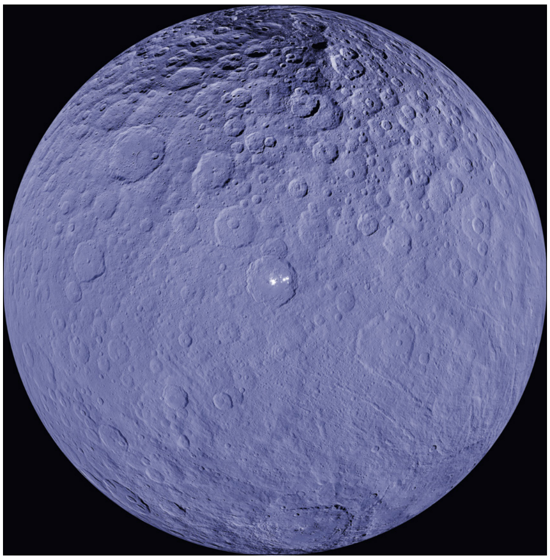
$$tg\,\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\; tg\,\frac{E}{2},\; r = a\,(1 - e\cos E)$$

při dané excentrické anomálii E. Výše uvedený vztah odvodil jako první Gauss.

Ve druhé hlavě *Vztahy příslušející jednotlivé poloze v prostoru*, zahrnující čl. 47–77, Gauss provedl podrobné výpočty pravoúhlých a sférických souřadnic tělesa. Zároveň v čl. 54 demonstroval elegantní řešení sférického trojúhelníka při zadané straně a k ní přilehlých úhlech. Vyjádřil diferenciální pohybové rovnice tělesa v geocentrických souřadnicích pro úseky eliptických drah. Teoretické úvahy spojoval s praktickými příklady. Dále zde řešil úlohu nalezení rádiusvektoru a argumentu šířky tělesa při znalosti heliocentrických souřadnic a polohy dráhové roviny. Vzhledem k nezbytnému zvýšení přesnosti pozorování Gauss rozvedl v čl. 71–72 teorii astronomických jevů – aberace a denní paralaxy. Hlavu zakončil odvozením závislostí mezi diferenciály souřadnic a dráhových elementů.

Třetí hlava *Vztahy mezi polohami na dráze*, pojímající čl. 78–109, obsahovala výpočet dráhy z několika pozorování. Gauss hledal nejvhodnější metodu určení dráhových elementů ze dvou heliocentrických poloh tělesa. Jednalo se o stanovení dráhy při znalosti dvou rádiusvektorů a příslušných časů. Popsal postup řešení, ve kterém zavedl veličiny P, Q, jejichž prostřednictvím vyjádřil poměry ploch trojúhelníků na drahách v prvním přiblížení. Nepřesnosti v jejich hodnotách vedly při výpočtech k chybám heliocentrických poloh, proto provedl rozbor důsledků malých změn P, Q – viz rozbor k čl. 134.

V čl. 84 Gauss slovně popsal, že tvar eliptické dráhy, její orientaci v prostoru a pohyb tělesa po dráze lze stanovovat ze dvou zadaných rádiusvektorů: *„Poněvadž je možné určovat celou dráhu dvěma rádiusvektory danými velikostí a polohou společně s jedním dráhovým elementem, a také časem, ve kterém se nebeské těleso pohybovalo z jedné polohy do druhé“… „Proto je naopak zjevné, že dva rádiusvektory dané velikostí a polohou současně s časem, v kterém nebeské těleso popisuje střední prostor, určují celou dráhu.“*



Trpasličí planeta Ceres zachycená sondou Dawn (NASA). Projekce je centrovaná na kráter Occator, který obsahuje nejvíce odrážející materiál (pozice 20° severní šířky a 239° východní délky). Tento obrázek byl získán při nízkém průletu ve výšce 385 km; rozlišení je asi 35 m na pixel. *Zdroj: NASA*

Určování polohy tělesa v libovolném čase při znalosti dvou heliocentrických poloh tělesa a časového intervalu t, v průběhu kterého přešlo z první polohy do druhé, analyzoval Gauss v důležitém čl. 88. Rozvedeno, vycházel ze znalosti rádiusvektorů r a r', odpovídajících polohám v a v' úhlů pravé anomálie, v je první v čase. Při výpočtu položil $v' - v = 2f$, $v' + v = 2F$, rozdíl excentrických anomálií $E' - E = 2g$, $E' + E = 2G$, $\sin\varphi = e$, $a\cos\varphi = b$. Úhel f byl znám, činil jednu polovinu úhlu mezi dvěma rádiusvektory, zatímco úhel poloviny rozdílu excentrických anomálií g znám nebyl.

Následující postup vycházel z Keplerovy interpretace středního pohybu tělesa, v níž pro časový interval Δt vyjádřený změnou střední anomálie ΔM platí závislost

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{2\pi}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Gauss v úvahách použil upravenou podobu

$$\Delta M = \frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}},$$

kde $\Delta M = M' - M$, symbolem t rozuměl čas přechodu z první do druhé polohy. Dále popsal plochu sektoru omezenou dvěma rádiusvektory prostřednictvím pravé anomálie $\frac{1}{2}\, rr' \sin 2f$. Následně zachytil součet velikostí rádiusvektorů $r + r' = 2a - 2ae\cos g\cos G$,

$$\sqrt{rr'}\,\cos f = (\cos g - e\cos G)a,$$

odkud obdržel

$$a = \frac{r + r' - 2\sqrt{rr'}\,\cos f \cos g}{2\sin^2 g}.$$

Vztah pro a obsahoval pouze jednu neznámou – g. V dalším odvození použil výše zmiňované vyjádření pro střední pohyb prostřednictvím střední anomálie s úpravou $\cos g = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} g$. Vzniklý vztah byl složitý a rozsáhlý, proto ho zjednodušil zavedením nových veličin, jak zachytil americký historik matematiky, fyziky

Německá desetimarková bankovka z roku 1999 s portrétem C. F. Gausse a distribuční funkcí nesoucí jeho jméno.

a astronomie Curtis Alan Wilson (1921–2012) v [16]. Gauss zavedl

$$l = \frac{r+r'}{4\sqrt{rr'}\ \cos f} - \frac{1}{2}, \qquad (3)$$

které lze vypočítat ze známých veličin r, r', f. Hlavní poloosu a vystihl prostřednictvím rádiusvektorů a úhlů pravé a excentrické anomálie vztahem

$$a = \frac{2\left(l+sin^2\frac{1}{2}g\right)cosf\sqrt{rr'}}{sin^2 g}.$$

Z rozdílu středních anomálií ΔM v Keplerově rovnici získal

$$\frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} = E' - e\ sinE' - E + e\ sinE =$$

$$= 2g - 2esingcosG = 2g - sin2g + 2cosfsing\frac{\sqrt{rr'}}{a}.$$

Dosazením za a Gauss obdržel

$$m = \frac{kt}{\left(2\sqrt{rr'}\cos f\right)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (4)$$

kde platí

$$\pm m = \left(l + sin^2\frac{1}{2}g\right)^{\frac{1}{2}} + \left(l + sin^2\frac{1}{2}g\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2g-sin2g}{sin^3 g}\right). \quad (5)$$

V uvedeném vztahu užil znaménko +, respektive –, podle toho, zda g bylo kladné, či záporné. Výrazy v poslední rovnici (5) postupně vyjadřují: m plochu obsaženou mezi dvěma rádiusvektory a eliptickým obloukem,

$$\left(l + sin^2\frac{1}{2}g\right)^{\frac{1}{2}}$$

plochu trojúhelníka tvořeného rádiusvektory a chordou spojující jejich koncové body,

$$\left(l + sin^2\frac{1}{2}g\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2g-sin2g}{sin^3 g}\right)$$

plochu segmentu omezeného eliptickým obloukem a výše popsanou chordou. Rekonstrukci a rozbor výpočtu vztahů provedl americký matematik a astronom Ormond Stone (1847–1933) v [17].

Odvození vztahu pro η vedlo k rovnicím

$$x = \frac{m^2}{\eta^2} - l, \qquad (6)$$

$$X = \frac{4}{3} + \frac{4.6}{3.5}x + \frac{4.6.8}{3.5.7}x^2 + \frac{4.6.8.10}{3.5.7.9}x^3 + \cdots, \qquad (7)$$

$$\eta = 1 + X\,(l + x). \qquad (8)$$

Gaussův výpočetní postup spočíval ve třech krocích. Nejprve stanovil konstanty l a m prostřednictvím vyjádření r, r', f a t z výše uvedených vztahů (3), (4). Následně předpokládal $\eta \approx 1$ a určil z rovnice (6) x. Ve třetím kroku stanovil X z rovnice (7) a užil hodnotu k lepší aproximaci η z rovnice (8). Opakoval celý cyklus, až η konvergovalo. Gauss propočítával mocninné řady, omezil se na několik prvních členů. Po úpravách dospěl k nám již zmiňované první Gaussově rovnici (2)

$$\eta^2 = \frac{m^2}{l+sin^2\frac{1}{2}g},$$

kde l a m byly dány výše uvedenými vztahy.

V čl. 106–109 provedl diskusi řešení Lambertovy úlohy [18], nazvané podle švýcarského matematika a astronoma *Johanna Heinricha Lamberta* (1728–1777). Jejím obsahem bylo stanovení dráhy při znalosti dvou rádiusvektorů r_1, r_2 a intervalu času mezi nimi uběhlého Δt. Ten závisel pouze na velikosti velké poloosy a a součtu velikostí rádiusvektorů $r_1 + r_2 = s$. Při gravitačním parametru $\mu = GM$, velikosti velké poloosy a, délky tětivy c, spojující koncové body rádiusvektorů na eliptickém oblouku, platil obecný vztah tzv. *Lambertovy časové rovnice* $\sqrt{\mu}\ \Delta t = f\,(a, r_1, r_2, c)$. Gaussova metoda navazovala na Lambertovu úlohu a geometrickými prostředky ji rozvíjela.

Ve čtvrté hlavě *Vztahy mezi polohami v prostoru* pojímající čl. 110–114, Gauss zkoumal geocentrické vzdálenosti tří bodů ležících v rovině procházející Sluncem. Právě o jejich znalost se opírala metoda stanovení dráhy ze tří pozorování. Namísto nyní nejčastěji používaných pravoúhlých souřadnic Slunce zavedl polární souřadnice, místo směrových kosinů použil sférické souřadnice – proto jeho rovnice měly složitější tvar. Současně přihlížel k tomu, aby vztahy byly vhodné pro tehdejší praxi logaritmických výpočtů.

Geometricky v čl. 114 Gauss ukázal, jak vzájemný poměr tří dvojnásobných ploch trojúhelníků n, n', n'' (dvojnásobek ploch PSP', $P'SP''$, $P''SP$), určených vztahy $n = r'r''\sin(v'' - v')$, $n' = r''r\sin(v'' - v)$, $n'' = r\,r'\sin(v' - v)$ lze použít při znalosti časových intervalů k výpočtu eliptických sektorů. Plochy trojúhelníků n, n', n'' jsou úměrné časovým intervalům. Symboly P, P', P'' zde označovaly pozorované polohy tělesa na jeho dráze, S polohu Slunce, r, r', r'' vzdálenosti tělesa od Slunce.

2.3. Druhá kniha

Druhá kniha podrobně zkoumala určování dráhy nebeských těles z pozorovacích údajů ve dvou krocích. První pojednával o aproximacích drah, minimálně ze tří, respektive čtyř pozorování, obsahoval hlavy jedna a dvě. Ve druhém kroku bylo provedeno zdokonalení prvního kroku pomocí dalších pozorovacích údajů a rozvinutím teorií zachycených v hlavách tři a čtyři.

První hlava druhé knihy *Určování dráhy ze tří úplných pozorování* zahrnovala čl. 115–163. Při úplném pozorování byly získány dvě souřadnice polohy tělesa, jeho délka a šířka, respektive rektascenze a deklinace v daném čase. Gauss vyložil podstatu určování dráhy tělesa ze tří délek a šířek získaných z pozorování. Metoda nebyla zcela vhodná, pokud dráha ležela v rovině ekliptiky. Důvodem byla skutečnost, že tři údaje délek z pozorování nebyly dostatečné pro určení čtyř zbývajících dráhových elementů (i a Ω jsou nadbytečné). Pro dráhu v blízkosti ekliptiky při pozorovaní trvajícím více let Gauss v [9] navrhl jako vhodnější čtyři délkové a dva šířkové údaje.

Gauss v čl. 119–120 diskutoval řešení soustavy šesti rovnic se šesti neznámými, jednu rovnici pro každý dráhový element. K nalezení šesti dráhových elementů byla nezbytná tři pozorování, z nichž každé poskytovalo dvě konstanty. Složitá podstata rovnic však v praxi neumožňovala řešení. Proto šest rovnic spojujících dané a neznámé hledané veličiny autor redukoval na dvě rovnice $X (x, y) = 0$, $Y(x, y) = 0$ o dvou neznámých, závisejících jednoduchým způsobem na x a y. Nemusely reprezentovat přímo dva dráhové elementy, ale souvisely s nimi vztahy, jejichž pomocí při znalosti x a y je bylo možné stanovit. Z povahy zkoumaného problému, v krátkém časovém intervalu mezi prvním a druhým pozorováním, vykazovaly obě veličiny přibližné hodnoty. Matematickou úpravou získal další hodnoty, již bližší skutečným. S jejich pomocí opakoval výpočet postupného sbližování vícekrát, až se hodnota dvou neznámých již neměnila. Následně jejich prostřednictvím určil dráhové elementy.

Popsaný iterační postup Gauss použil v řadě případů. Například ho aplikoval na dvě proměnné x, y geocentrických vzdáleností, přesněji logaritmy uvedených vzdáleností v projekci na rovníkovou rovinu, pro první a třetí pozorování. Z nich odvodil rádiusvektory tělesa, orientaci oběžné roviny, jakož i elementy eliptické dráhy. Výpočet hodnot pro střední pozorování tak byl výsledkem řešení dvou rovnic, vyhovujících podmínce $X = Y = 0$. Takto v čl. 124–129 demonstroval základní metodu stanovení dráhy ze tří pozorování.

Do čl. 130 zařadil Gauss rozbor podmínek řešení, rozdělených do tří předpokladů. Popsal je ruský matematik a astronom *Michail Fedorovič Subbotin* (1893–1966) v [19]:

1. Neznámé veličiny x, y musely být zvoleny tak, aby jejich přibližné hodnoty bylo možné obdržet z podstaty řešeného problému, přinejmenším pokud heliocentrický pohyb tělesa za dobu pozorování nebyl velký.
2. Bylo nutné, aby malým změnám x, y odpovídaly nepříliš velké změny z nich vypočítaných veličin tak, aby vzniklé chyby x a y nenarušovaly jejich přibližný výpočet.
3. Výpočetní operace vedoucí od hodnot x a y k hodnotám X a Y nesměly být příliš složité.

Uvedené podmínky považoval Gauss za předběžné kritérium vhodnosti své metody. Konstatoval, že jeho řešení podmínkám plně vyhovovalo.

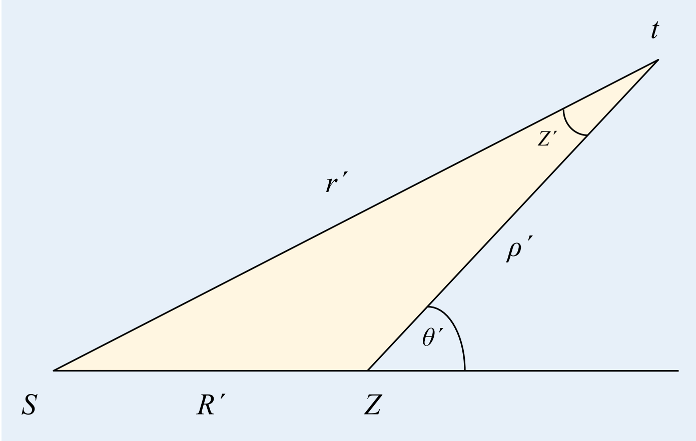
Podstatu metody stanovení dráhy obsaženou v čl. 131–163 popsal Wilson v [18]: Nejprve Gauss vyjádřil přesné hodnoty δ, δ', δ'' (projekce EP, $E'P'$, $E''P''$ na rovinu procházející středem Země rovnoběžně s ekliptikou). K určení δ' provedl v čl. 131 substituční aproximaci k vyjádření poměrů časových intervalů θ, θ', θ'' pro $k\,(\tau'' - \tau')$, $k\,(\tau'' - \tau)$, $k\,(\tau' - \tau)$, kde k byla konstanta zavedená v čl. 1. Časové intervaly θ, θ', θ'' odpovídaly sektorům $P'S\,P''$, $P\,S\,P''$, $P\,S\,P'$. Následně definoval η, η', η'', takže platilo $n\,\eta = \theta$, $n'\eta' = \theta'$, $n''\eta'' = 0''$. V tomto odstavci E, E', E'' označovaly polohu Země.

Zásadním krokem řešení bylo vyjádření poměru ploch trojúhelníků mezi dvěma rádiusvektory a příslušnou tětivou spojující jejich koncové body prostřednictvím Gaussových parametrů P a Q v čl. 134, které zavedl v prvním přiblížení vztahy $P = \theta''/\theta$ a $Q = \theta\theta''$.

Při výpočtu dráhy z hodnot P a Q použitím vztahů pro poměr ploch trojúhelníků získal upřesněnou hodnotu. Dalším dosazením do vztahů

$$P = \frac{n''}{n} \text{ a } Q = 2\left(\frac{n+n''}{n'} - 1\right) r'^{\,3},$$

obdržel přesnější hodnoty P_1 a Q_1. Opakovaným řešením rovnic pro vzdálenosti Slunce–těleso r', Země–těleso ρ', obě při středním pozorování, získal další nové hodnoty P_2 a Q_2 a přesnější dráhu, která umožňovala nalézt ještě více přesnější hodnoty P_3 a Q_3 atd. Při jejich znalosti mohl tedy z rovnic nalézt r', ρ' a následně vypočítat dráhové elementy.



Obr. 8 Polohy Slunce–Země–těleso při středním pozorování.

Gauss ukázal, že iterace rychle konverguje a dovoluje stanovit dráhu odpovídající pozorováním. Implicitně metoda předpokládala malou numerickou excentricitu, a naopak velkou vzdálenost tělesa od Slunce. Při nesplnění podmínky iterativní proces nalezení P a Q konvergoval pomalu a hodnoty bylo nutné hledat interpolací. Metoda nebyla univerzálním řešením stanovení obecné kuželosečkové dráhy, například byla nepoužitelná pro dráhy parabolické, neboť výchozí vztah $Q = \theta\theta''$ prvního přiblížení nebyl splňován.

V již zmiňovaném čl. 134 Gauss později upřesnil vztahy pro obě veličiny

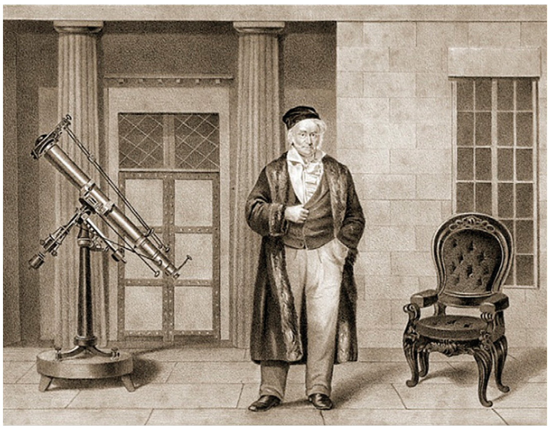
$$P = \frac{\theta''\,\eta}{\theta\,\eta''} \text{ a } Q = \frac{r'r'\theta\theta''}{rr''\eta\eta''\cos f \cos f' \cos f''}.$$

Výpočetní postup vycházející z výše uvedených úvah popsal v čl. 136–171.

K určení P a Q použil Gauss v čl. 141 a 142 rovnici $M\sin^4 z = \sin(z \pm q)$. Má dva či čtyři reálné kořeny – autor v čl. 141 ukázal, jak najít vhodné řešení. V rovnici je M vždy kladné, M a q byly známé funkce P a Q. Za podmínky $R' > r'$ má rovnice tvar $M\sin^4 z = \sin(z + q)$, v případě $r' > R'$ potom $M\sin^4 z = \sin(z - q)$ výraz $\sin(z - q)$ je kladný. V příloze Gaussova spisu jsou tabulky z řešení obou rovnic pro různé hodnoty q.

Neznámou byl úhel Slunce–těleso–Země z, vzdálenost Slunce–těleso byla r', vzdálenost Slunce–Země R', vše při středním pozorování, uspořádání těles je na obr. 8. Z uvedené rovnice nalezneme z, dále r', následně získáme ρ' a odtud ρ a ρ''. Gaussův postup tak umožňoval stanovení vzdálenosti tělesa od Země při všech pozorováních a od Slunce při středním pozorování.

V čl. 146 Gauss komentoval zavedení veličiny η a její souvislost s Gaussovými parametry P, Q takto: *„Výpočet elementů z r', r'', $2f$ a opraveného časového intervalu mezi druhým a třetím pozorováním, jehož výsledek vynásobený veličinou k (čl. 1) označíme θ, z dalších r, r', $2f''$ a časového intervalu mezi prvním a druhým pozorováním vynásobený bude roven θ'', byl zapsán metodou vyloženou v č. 88–105 a veličinou tam označovanou y, jejíž hodnotu v první z těchto kombinací budeme nazývat η a v druhé η''. Bude tedy*



Johann Carl Friedrich Gauss, německý matematik, fyzik a astronom.

$$P = \frac{\theta''}{\theta}\frac{\eta}{\eta''} \text{ a } Q = \frac{r'r'\theta\theta''}{rr''\eta\eta''\cos f\cos f'\cos f''}.\text{“}$$

Druhá hlava *Určování dráhy ze čtyř pozorování, z nichž pouze dvě jsou úplná* obsahuje čl. 164–171. Pojednává o stanovení dráhy blízké k eliptické, jestliže byly k dispozici pouze dvě úplná pozorování a dvě délky tělesa. Prostřednictvím heliocentrických poloh tělesa Gauss zjistil jeho dráhu. V ilustrujícím numerickém příkladu zvolil v čl. 171 údaje pro Vestu.

Třetí hlava *Určování dráhy nejlépe vyhovující libovolnému počtu pozorování* je zachycena v čl. 172–189. Jsou v ní vyloženy detaily aproximativních postupů při výpočtech drah, které vycházely z metod probraných v druhé knize, prvních dvou hlavách. V čl. 177 Gauss zavedl eliminační metodu – řešení soustavy lineárních algebraických rovnic postupným vylučováním proměnných.

V dalších úvahách zdůraznil význam aritmetického průměru. Předpokládal, že pokud nějaká hodnota byla určována přímo z několika pozorování provedených za stejných podmínek a se stejnou pečlivostí, nejpravděpodobnější hodnotu poskytoval aritmetický průměr z pozorovaných hodnot.

Gauss si uvědomoval, že pozorovací údaje nejsou přesné, a tudíž neexistuje dráha, která by jim přesně vyhovovala. Efektivní zpracování pozorovacích údajů optimalizoval metodou nejmenších čtverců. O ní se zmínil v čl. 186: „*Ostatně, princip, v souladu s kterým součet kvadrátů rozdílů mezi pozorovanými a vypočítanými hodnotami musí být nejmenší, může být zdůvodněn i nezávisle na výpočtu pravděpodobnosti.*“ K prioritě použité metody se Gauss vyjádřil lakonicky: „*Náš princip, který používáme již od roku 1795, byl nedávno rozvíjen také v článku Legendera Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes, Paris, 1806.*“

Použití metody demonstroval na krátkých ukázkách, při opravách dráhových elementů a hledání dráhy. Zdůraznil nutnost provedení předběžných korekcí pozorovacích údajů. Z jejich souboru vyřadil ty, které se vyznačovaly zjevně velkými chybami, jak jsme ukázali v úvodu článku.

Ve čtvrté hlavě *O určování drah se započtením poruch*, zahrnující čl. 190–192, Gauss popsal návrhy výpočtů odchylek od eliptických drah při započtení poruch vyvolaných planetami s velkou hmotností. Detaily úvah neuváděl, vyzdvihl pouze význam přesných výpočtů drah pro určování hmotnosti rušících těles.

3. Závěr

V článku jsme na ukázkách demonstrovali Gaussovo použití matematických, zejména geometrických prostředků při hledání dráhy v jeho spisu *Theoria motus,* od pozorovacích údajů až po vyjádření veličin popisujících pohyb tělesa, v případě Cerery zachycení sektoru eliptické plochy, veličiny η a Gaussových parametrů P a Q. Gauss využil kombinaci vztahů mezi dynamickými a geometrickými parametry dráhy, vyplývajícími z pohybu tělesa podle Keplerových zákonů a Newtonova gravitačního zákona. Poruchy od planet s větší hmotností při řešení nezohlednil, omezil se na připomenutí existence jevu.

Počátkem 19. století astronomové už znali metody výpočtu drah těles, takže se zmíníme o dvou zásadních. Analýze je podrobil Subbotin v [19], kde zkoumal návaznost Gaussova postupu na ně. Konstatoval určitou míru příbuznosti s Lagrangeovou metodou stanovení drah [20, 21] z let 1778, 1783, která používala rozklady n/n' a n''/n' na nekonečné řady, zatímco Gauss zvolil iterativní postup v přiblíženích. Další řešení publikoval r. 1780 francouzský matematik, fyzik a astronom *Pierre Simon Laplace* (1749–1827) v [22]. Konečný vztah v prvním přiblížení pro vzdálenost tělesa od Země při středním pozorování ρ' byl u Gausse

$$\rho' = \frac{R'}{Q}\left(\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3}\right),$$

zatímco Laplace použil tvar

$$\rho' = \frac{R'}{\mu}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{R'^3}\right),$$

kde Q a μ byly parametry určované z hodnot vypočítaných z pozorovacích údajů. Oba francouzští autoři své metody stanovení drah těles nedopracovali do praktické podoby, numerickými výpočty se nezabývali.

Naproti tomu Gauss se nespokojil pouhým uvedením teoretických vzorců, ale předložil i schémata výpočetních algoritmů. Zkoumal rovněž vliv chyb výchozích údajů na výsledek či porovnával přesnost různých vztahů u počítaných veličin. Gaussem navržená a ověřená metoda určování dráhy se ukázala oproti výše uvedeným kratší a vhodnější. Proto byla velmi rychle uvedena do praxe, její princip měl nadčasovou hodnotu, používala se i ve 20. století.

Zobecnění postupu stanovení eliptické dráhy ze tří pozorování provedl r. 1889 americký matematik a fyzik *Josiah Willard Gibbs* (1839–1903) [23] zavedením vektorové algebry do nebeské mechaniky. Zdokonalil Gaussovu metodu určování rádiusvektorů při prvním a třetím pozorování. Ke konkrétním numerickým aplikacím použil původní pozorovací údaje pro Ceres.

Výpočet dráhy Cerery při příležitosti stého výročí Gaussova narození komentoval český matematik a fyzik *František Josef Studnička* (1836–1903): „*… oběžnička, jíž dáno jméno Ceres, nemohla delší dobu býti sledována a ztratila se konečně na dobro, nemajíc ještě dráhu přesně vyměřenou. Psalo se již 1. prosince 1801 a nově objevená a brzy zase ztracená hvězdička nebyla ještě na obloze nalezena…*“.

„*Mezi tím však uveřejnil jakýsi Dr. Gauss stručné, ale velmi přesné popsání jejího oběhu, pravý to zatykač, a sice na základě trojího pozorování, jež Piazzi dne 2. a 22. ledna, pak 11. února provedl. Výpočet byl proveden podle zcela nových method a byly výsledky jeho tak správné, že již 7. prosince postihl Zach v této Gaussově dráze nebeského úskoka…*“ [24]

Literatura

[1] J. Titius: *Betrachtung über die Natur, vom Herrn Karl Bonett.* Johann Friedrich Junius, Leipzig 1766.

[2] J. E. Bode: *Anleitung zur Kenntniss des gestirnten Himmels.* Dieterich Harmsen, Hamburg 1772.

[3] C. Cunningham: *Discovery of the First Asteroid, Ceres.* Springer Cham Heidelberg, New York Dordrecht London 2016. Springer International Publishing, Switzerland 2016, s. 217.

[4] G. Piazzi: *Risultati delle osservazioni della nuova stella scoperta il dì 1.* Gennajo all'Osservatorio reale di Palermo. Palermo 1801.

[5] F. X. von Zach: Über einen zwischen Mars und Jupiter längst vermutheten, nun wahrscheinlich entdeckten neuen Hauptplaneten unseres Sonnen-Systems. *Monatliche Correspondenz* **3**, 592 (1801).

[6] F. X. von Zach: Fortgesetzte Nachrichten über den längst vermutheten neuen Haupt-Planeten unseres Sonnensystems. *Monatliche Correspondenz* **4**, 279 (1801).

[7] F. X. von Zach: Fortgesetzte Nachrichten über den längst vermutheten neuen Haupt-Planeten unseres Sonnensystems. *Monatliche Correspondenz* **4**, 362 (1801).

[8] F. X. von Zach: Fortgesetzte Nachrichten über den längst vermutheten neuen Haupt-Planeten unseres Sonnensystems. *Monatliche Correspondenz* **4**, 638 (1801).

[9] J. Kepler: *Gesammelte Werke. Band III. Astronomia Nova.* Herausgegeben von Max Caspar. Zweite Unveränderte Auflage. C. H. Beck´sche Verlagsbuchhandlung, München 1990.

[10] F. Klein: Gauß´wissenschaftliches Tagebuch 1796–1814. *Mathematische Annalen* **57**, 1 (1903).

[11] K. F. Gauss: Summarische Übersicht der Bestimmung der Bahnen der beiden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden. *Monatliche Correspondenz* **20**, 197 (1809).

[12] D. A. Teets, K. Whitehead: The Discovery of Ceres: How Gauss Became Famous. *Mathematics Magazine* **72**, 83 (1999).

[13] C. F. Gauss: *THEORIA MOTVS CORPORVM COELESTIVM IN SECTIONIBVS CONICS SOLEM AMBIENTIVM AVCTORE CAROLO FRIDERICO GAVSS.* FAMBVRGI SVMTIBVS FRID: PERTHES ET I. H. BESSER, 1809. F. Ch. Pethers, Hamburg 1809.

[14] C. F. Gauss: *Theorie der Bewegung der Himmelskörper.* Georg Olms Verlag, Hildesheim Zűrich New York 2015.

[15] K. F. Gauss: *Theory of the Motion of the Heavenly Bodies Moving about the Sun in Conic Sections.* Dover Publications, Inc. Mineola, New York 2004.

[16] C. Wilson: Carl Friedrich Gauss, Book on Celestial Mechanics (1809). In *Landmark Writings in Western Mathematics 1640–1940.* Edited by I. Grattan-Guinness. Elsevier Science, Amsterodam 2005, s. 316.

[17] O. Stone: On the Ration between Sector and Triangle in the Orbit of Celestial Body. *American Journal of Mathematics* **3**, 326 (1880).

[18] J. H. Lambert: *Insigniores orbitae cometarum proprietates.* Bassel 1761.

[19] M. F. Subbotin: Astronomičeskije i geodezičeskije raboty Gaussa. In *Karl Fridrich Gauss.* Izdatělstvo akademii nauk SSSR, Moskva 1956, s. 241.

[20] J. L. Lagrange: *Sur le Problème de la détermination des orbites des comètes d´après trois observations, 1-er et 2-ième mémoires.* Nouveaux Mémoires de l´Académie de Berlin, 1778.

[21] J. L. Lagrange: *Sur le Problème de la détermination des orbites des comètes d´après trois observations, 3-ième mémoire.* Nouveaux Mémoires de l´Académie de Berlin, 1783.

[22] P. S. de Laplace: *Mémoire sur la determination des orbites cométes.* Mémoires de l´Académie Royale de Paris, 1780.

[23] W. J. Gibbs: On the determination of elliptic orbits from three complete observations. *Memoirs of the National Academy of Science* **4**, 79 (1889).

[24] F. J. Studnička: Na oslavu stoleté památky narození K. B. Gausse. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky* **6**, 146 (1877).