Přiblížení základních principů kvantové fyziky bez použití matematiky I.

Zdeňka Koupilová

Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, katedra didaktiky fyziky, V Holešovičkách 2, 180 00 Praha 8; zdenka.koupilova@matfyz.cuni.cz

V tomto článku a v jeho pokračování rozvíjím možnosti, jak se seznámit se základními principy a myšlenkami kvantové fyziky, aniž by byla použita vyšší matematika. Text shrnuje můj osobní pohled a přístup, se kterým sice nemusejí všichni čtenáři plně souhlasit, ale věřím, že učitelé, středoškolští a vysokoškolští studenti v něm naleznou inspirativní myšlenky. Články jsou také příspěvkem k tomu, že rok 2025 UNESCO vyhlásilo rokem kvantové fyziky a kvantových technologií [1].

Populární (rozuměj nematematické) souhrny základních myšlenek a principů kvantové teorie existují v mnoha podobách, a to od zkušených a známých autorů, např. [2–5], ale i mnoha jiných. Takže se nabízí otázka, proč k nim přidávat další. Při psaní tohoto textu jsem vycházela ze svých zkušeností s popularizací tohoto tématu mezi středoškoláky, ze zkušeností získaných v rámci mnohaleté výuky budoucích učitelů fyziky a vedení kurzů na témata týkající se mikrosvěta pro učitele z praxe. Velký prostor ve své vysokoškolské výuce věnuji diskusím, jak o poznatcích, které jsme si ilustrovali matematicky, hovořit smysluplně a s co nejmenším zkreslením i bez matematiky – tedy tak, jak to budou moji studenti dělat ve své budoucí praxi na středních školách. Přitom jsem společně se studenty objevila příměry, analogie a příklady, které nebyly dosud jinde publikovány. Ve výuce ráda využívám i různé vtípky a internetové memy,[1] které dobře ilustrují bizarní aspekty kvantové fyziky. Zjistila jsem, že v některých případech může být zajímavé výklad doplnit o pohled velkých fyziků na probíraný aspekt kvantové teorie pomocí citátů jejich výroků. Právě tyto konkrétní nápady využitelné ve výuce, které se často nacházejí v graficky oddělených rámečcích, by měly tvořit inspirativní obsah obou článků.

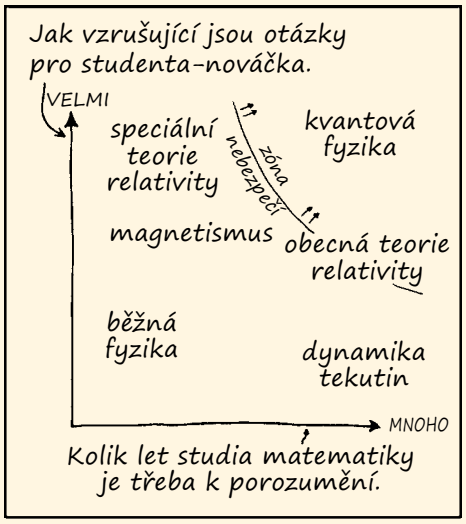
V první části se nejprve pokusíme zodpovědět si otázku, proč se vůbec snažit přiblížit principy kvantového světa bez pokročilé matematiky. Dále si uvědomíme, jaké jsou překážky při používání naší běžné zkušenosti a jazyka. Zaměříme se na význam experimentu. Vše to zarámujeme diskusí vlnově-korpuskulárního dualismu a dvouštěrbinového experimentu. Ve druhé části se nejprve zaměříme na princip superpozice a s ním propojené vlastnosti kvantového měření s jeho pravděpodobnostním charakterem. Zmíníme i relace neurčitosti a kvantování veličin. Zajímavé důsledky vhodné k diskusi přináší i principiální nerozlišitelnost stejných částic. Propletení stavu dvou částic, které také zmíníme, nemá v klasickém světě žádnou přímočarou analogii, což ztěžuje jeho pochopení, ale je klíčové pro kvantové technologie. A trošku techničtější je ukázka různých reprezentací dvoustavového systému, včetně reprezentací grafických v závěru druhé části.

Proč se snažit najít způsob, jak učit kvantovku na středních školách?

Kvantová teorie je často vnímána jako velmi obtížná partie fyziky – divná, neuchopitelná až nepochopitelná. Na druhou stranu je však třeba kvantové jevy stále častěji brát v úvahu při konstrukci současných přístrojů. Rychle probíhá také rozvoj technologií ryze kvantových, které nás v nepříliš vzdálené budoucnosti pravděpodobně obklopí. Je tedy celkem přirozené se domnívat, že budoucí pracovníci v technických profesích by měli být seznámeni s myšlenkami kvantové teorie velmi dobře, ale že i běžní uživatelé by měli dostat možnost její základy poznat. Obě tyto tendence lze vysledovat zejména v mezinárodním kontextu, např. z nové velké výzkumné iniciativy nazvané Quantum Flagship [6] a její iniciativy na podporu vzdělávání QTEdu [7] nebo ze zaměření tematické skupiny pro výuku kvantové mechaniky na úrovni střední školy v organizaci GIREP [8]. Nejde o to, aby běžní středoškoláci uměli řešit problémy či počítat cokoli pomocí matematického aparátu, který kvantová fyzika používá a který je většinou poměrně komplikovaný. Ale je třeba najít cesty, jak s nimi mluvit o základních myšlenkách – identifikovat hlavní principy, zformulovat je a doplnit úvahovými úlohami, které by odstartovaly přemýšlení o kvantovém světě.

1 Tyto prvky jsem zařadila i do tohoto článku. Protože tyto obrázky kolují po internetu v mnoha variantách a na mnoha místech, upustila jsem od důsledného citování jejich zdrojů.

Obrázek vpravo není vážně míněným znázorněním, ale spíše vtípkem. Přesto se na něm podařilo zachytit zvláštní polohu kvantové fyziky. „Graf“ naznačuje, kde se různé fyzikální teorie nacházejí z hlediska toho, jak složitou matematiku potřebujeme k jejich serióznímu studiu a jak poutavé jsou pro začínající studenty či běžnou veřejnost otázky, které zkoumá. Vidíme z něj, že např. mechanika kontinua vyžaduje opravdu složitý matematický aparát, ale málokdo najde prvoplánově nějaké zvláštní vzrušení v tom, jak „teče voda“ nebo „proudí vzduch“. Na druhou stranu speciální teorie relativity se svými paradoxy dvojčat, kontrakcí délek, dilatací času, „těžknutím“ při rychlém pohybu a dalšími aspekty vyvolává spoustu otázek a vzbuzuje zvědavost a lze ji studovat s použitím celkem jednoduché (v zásadě středoškolské) matematiky. Kvantová fyzika je stejně intelektuálně napínavá jako speciální relativita, ale matematicky je mnohem složitější. To, o co se snažím ve své výuce a při setkávání se středoškoláky a jejich učiteli, je posunout kvantovou fyziku směrem doleva, tj. prezentovat její základní myšlenky bez složité matematiky, ale tak, aby se zachovala jejich hloubka.



Proč má tolik lidí podivné názory na kvantovou mechaniku.

Některé výzkumy [9, 10] ukazují, že kvantová fyzika má společně s dalšími tématy zařazovanými do tzv. moderní fyziky (jako např. teorie relativity) potenciál žáky zaujmout více než klasická témata, jako mechanika, elektřina a magnetismus či termodynamika, a tím je pro fyziku získat.

Tento potenciál si již před lety uvědomovali i někteří čeští fyzikáři. Ještě jako studentka učitelství jsem se na praxi setkala s tím, že po uvolnění „učebních osnov,“ které umožnilo přesouvat celá témata mezi ročníky, zařadili do prvního ročníku střední školy jako vstupní téma místo nejběžnější mechaniky např. jadernou fyziku. Zatímco mechanika je pro studenty prvního ročníku matematicky poměrně pokročilá (a možná ne až tak atraktivní), matematicky pokročilejší části jaderné fyziky nejsou nijak rozsáhlé a lze se k nim krátce vrátit ve vyšším ročníku či výběrovém semináři (v zásadě jde jen o složitější úlohy, ve kterých se vyskytuje rozpadový zákon a k jejichž vyřešení je třeba znát logaritmy).

Seznámit se i s historickým vývojem považuji u kvantové fyziky za důležitější a zajímavější než třeba u mechaniky či dalších klasických témat. Kvantová fyzika totiž znamená zcela nový pohled na svět kolem nás a zásadní změny ve filozofickém pojetí reality. I velcí fyzikové své doby se s obtížemi potýkali s paradoxy, které přinesla. Vznik kvantové fyziky také hezky ilustruje snahu fyziků o jistou dokonalost a úplnost. Na konci 19. století panoval všeobecný názor, že fyzika je už v podstatě „celá hotová“. Newtonova mechanika popisovala pohyby jednoduchých i složitějších těles na Zemi a se zapojením gravitačního zákona i „na nebi“, tj. pohyb planet a dalších těles. I matematicky byla fyzika detailně propracována – robustní Lagrangeův a Hamiltonův formalismus či princip minimální akce opravdu umožnily elegantně řešit i velmi složité problémy. Maxwellovy rovnice popisovaly nejenom veškeré elektromagnetické jevy, ale také ukázaly, že do elektromagnetismu lze zahrnout i celou optiku. Sjednocování původně oddělených teorií mají fyzikové velmi v oblibě a zdálo se, že se stačí zaměřit na aplikace, protože fyzikální popis světa je kompletní – až na pár drobností. Mezi tyto drobnosti patřilo například vysvětlit, proč atomy vyzařují jen světlo s danými frekvencemi (mají tzv. čárové spektrum), jak popsat tepelné vyzařování těles, proč drží molekuly pohromadě a několik dalších věcí. Ale právě skutečnost, že nad těmito „drobnými detaily“ fyzici nedokázali jen tak mávnout rukou jako nad nepodstatnými a snažili se je také dovysvětlit, otevřela dveře do fascinujícího světa chování objektů mikroskopických rozměrů.

Whoever is careless with the truth in small matters cannot be trusted with important matters.
Tomu, kdo nedbá pravdy u drobných věcí, nelze věřit ani v případě věcí podstatných.
Albert Einstein

Na druhou stranu výzkumy ukazují, že na středních školách ve světě převažuje tzv. „kvazihistorický výklad“ kvantové fyziky [11]. S tímto přístupem jsem se v době svých gymnaziálních studií setkala i já a ukazuje se, že dominuje ve výuce v českých školách i dnes [12]. Při této výuce se žáci sice seznámí s několika důležitými experimenty a vybranými aplikacemi (často i v historickém kontextu), ale základním principům kvantového popisu světa a jejich důsledkům se čas téměř nevěnuje. Tento stav rozhodně nelze považovat za uspokojivý.

Při probírání jakéhokoli tématu se studenti rádi ptají, k čemu jim je vlastně dobré to znát/umět. A je dobré umět na tuto otázku odpovědět, aby odpověď byla jasná a srozumitelná opravdu každému žákovi. Zastavme se ale nejprve u trochu obecnější otázky. Otázky, k čemu kvantová fyzika přispěla, k čemu ji momentálně využíváme a co si slibujeme, že nám pomůže vyřešit.

Kvantová fyzika nám umožnila vysvětlit strukturu a chování atomů a molekul. Bez nadsázky lze říci, že jakmile se chemik začne ptát proč – např. proč je molekula vody lomená, jak vypadá molekula čpavku, proč je uhlík čtyřvazný atp. – tak musí odpověď hledat v kvantové fyzice, protože chemie ani klasická fyzika odpověď nenabízejí. Také až kvantová fyzika vysvětlila vyzařování světla látkou. A to nejen krásná čarová spektra atomů, která fyzikům na přelomu 19. a 20. století motala hlavu, ale také zastoupení jednotlivých vlnových délek (tj. barev ve viditelné části spektra), které vyzařuje např. horká plotýnka elektrického vařiče či rozžhavený drát při různých teplotách.

V dnešní době jsme se díky neustálé miniaturizaci elektroniky dostali do situace, kdy při konstrukci čipů musíme brát v úvahu i ryze kvantové efekty, např. skutečnost, že se elektron může dostat i za bariéru, na jejichž překonání nemá dost energie (tzv. tunelování). Vlnové vlastnosti elektronů využíváme ke zobrazování malých struktur.

We can see only the short distance ahead,
but we can see plenty there that needs to be done.
Vidíme jen kousek dopředu, ale vidíme tam mnohé,
co bude třeba vykonat.
Alan Turing

Zdá se, že momentálně také stojíme na prahu doby, kdy dojde k mohutnému rozvoji kvantových počítačů. Tato zařízení jsou příslibem, že nám pomohou v modelování složitých molekul a určování jejich vlastností, což by mohlo vést k obrovskému urychlení vývoje nových léků, včetně těch na dosud neléčitelné nemoci, či přímo ke genové terapii. Bez časově a finančně náročného testování mnoha potenciálně vhodných sloučenin by kvantové počítače mohly navrhnout chemické složení baterií s mnohem efektivnějším skladováním energie nebo efektivnější hnojiva či přímo zdroje potravin [13].

Kvantová fyzika bezpochyby ovlivní budoucnost lidstva. Nezapomeňme však, že otázka studentů původně zněla, proč by se ji měli učit zrovna oni, případně proč by měla být součástí středoškolské výuky. Stejně jako se v dnešní době hodí znát základní principy fungování elektřiny, elektrické rozvodné sítě, motorů a jiných přístrojů, tak v budoucnu bude kolem nás mnohem více technologií založených na kvantových principech. Určitě bude velmi potřebné rozumět i těmto technologiím. Rozhodně to bude velká možnost uplatnění na trhu práce [14].

Oprostěme se od zkušenosti

Prvním krokem, který nám velmi pomůže při zkoumání mikrosvěta, je přijetí skutečnosti, že v mikrosvětě se jednotlivé objekty chovají úplně jinak, než na co jsme zvyklí ze světa kolem nás. Proto je třeba ke zkoumání mikrosvěta přistupovat zcela bez jakýchkoli „předsudků" o tom, jak se věci mají chovat. Můžeme si třeba představit, že vyrážíme na neznámý ostrov, planetu či dokonce do vzdálené galaxie a snažíme se poznat fyzikální pravidla, která zde platí. A která mohou být velmi odlišná od toho, na co jsme zvyklí, takže mohou být pro někoho až trochu šokující. Jediné, co víme nebo budeme předpokládat, je, že se můžeme opřít o logické vyvozování důsledků.

Those who are not shocked when they first
come across quantum theory cannot possibly
have understood it.
Ti, kdo nejsou šokováni, když se poprvé setkají
s kvantovou teorií, jí pravděpodobně neporozuměli.
Niels Bohr

Absenci přímé zkušenosti, můžeme jí říkat třeba selský rozum nebo intuitivní náhled, s chováním objektů v mikrosvětě (elektronů, fotonů, …) se mi daří studentům přiblížit pomocí následující analogie. Představte si kamaráda, který je od narození slepý, a vy se mu pokusíte vysvětlit, co je to barva a postihnout opravdu veškeré její aspekty. Můžete mu dávat různé předměty a pojmenovávat barvu – časem si jistě zapamatuje, jak barvy jednotlivých předmětů nazýváme, případně mu můžeme na předměty umístit popisky v Braillově písmu. Mohli bychom mu také vyrobit přístroj podobný kameře, který by místo obrazovky vše převáděl na hmatový panel a různé barvy by byly znázorněny třeba pomocí různé hrubosti povrchu.[2] V našich silách by mělo být i opatřit mu přístroj na principu spektroskopu, který by mu říkal barvu povrchu (vlnovou délku odraženého světla), na který by přístroj namířil. Mohlo by to být o něco komplikovanější zařízení – spektrometr, který by mu nějakým hmatovým, akustickým či přímo hlasovým způsobem zpřístupnil informaci o zastoupení jednotlivých barev, tedy spektru. Můžeme mu vysvětlit skládání barev a spoustu dalších poznatků, které o barvě máme. Do hry lze zapojit i emoce, protože i na ně barvy působí. Můžeme jít jinou cestou a připodobnit barvu třeba k vůni, chuti, teplotě… zkrátka k nějakým vjemům, které zná. V některých aspektech to barvu popíše dobře, v jiných ale takový model bude velmi odlišný či zcela nepoužitelný.

Přes veškerou naši snahu jeho pochopení, co vlastně přesně barva je a také všech jejich vlastností, zůstane mnohem menší než naše. Záhadná mu může zůstat třeba žlutá barva, která je ve spektru, tj. má svoji jedinečnou vlnovou délkou, ale vzniká také složením zeleného a modrého světla. Ale to, co mu bude zcela chybět, budou další aspekty – proč nám některé odstíny barev připadají teplé a některé studené, proč k sobě některé barvy ladí a jiné nikoli, proč nás zelená barva spíše uklidňuje a červená dráždí.

Situace takových lidí je velmi výstižně popsána v biografickém příběhu hluchoslepé Američanky Heleny Kellerové (viz ukázka v rámečku), která žila v první polovině 20. století. Přestože byla od svých 19 měsíců zcela slepá a hluchá, dokázala vystudovat vysokou školu, plynně ovládala několik jazyků, naučila se i mluvit hlasem a svůj život zasvětila boji za lepší život lidí s postižením.

Mnoho vidících lidí se často zajímá o to, mohu-li si představit tu nebo onu barvu. Někteří se dokonce ptají, zda je možno hmatem rozeznat barvy...

Ovšemže ne. Užívám sice slovníku vidomých lidí, mluvím o barvách a jejich odstínech stejnými slovy jako oni, ale představit si je nedovedu.

Když jsem byla mladší, často jsem chtěla po svých blízkých, aby mi vysvětlili různé barvy. Například jednou mi ušili pěkné vlněné šaty a řekli mi, že mají barvu jako bílá káva. Svým střihem se mi šaty velmi líbily, a proto jsem chtěla vědět, jaká je barva bílé kávy. Řekli mi: „Zcela taková, jako káva s mlékem."

Ovšem, představila jsem si vůni i chuť kávy, ale barvu nikoli. Místo barvy jsem si představila své šaty, které jsem velmi pozorně ohmatávala, ačkoli jsem dobře věděla, že prsty mi nepomohou poznat „kávovou barvu".

Jindy jsem se ptala, jakou barvu má moje šála, a dozvěděla jsem se, že je barvy pískové. „Jaká je ta písková barva?" ptala jsem se. „Přesně taková, jako je písek. Představuješ si?"

2 V knize Spasitel [15] se její autor Andy Weir pokusil naznačit některé problémy, které by se mohly vyskytnout při komunikaci s tvorem, jež není schopen vnímat světlo, včetně možností, jak by se daly překonat (samozřejmou námitkou může být, že se jedná o beletrii, tj. pouhou fantazii autora, která může být velmi vzdálena od skutečnosti).

Jasně jsem si představila písek v naší zahradě, který děcka rozsypávaly lopatkami a kbelíčky. Potom jsem si představila břeh řeky, mnoho vlhkého a chladného písku. Nakonec jsem si představila i známou pláž na mořském břehu se suchým, horkým pískem, do kterého jsem zarývala nohy. Ale nic z toho mi nedalo představu o pískové barvě...

Jindra Jarošová: *Via Lucis* [16]

Vzhledem k chování objektů v mikrosvětě jsme na tom stejně jako skupina nevidomých se spektrometry a dalšími přístroji. Máme mnoho složitých přístrojů, kterými můžeme mikrosvět zkoumat, a jsme odkázáni na to jejich výsledkům věřit. Chování, které pozorujeme, je pro nás neobvyklé a zvláštní. Často žasneme nad tím, jak to celé vlastně funguje, jak je to vzdálené naší zkušenosti a vzpírá se to naší představivosti. Snažíme se najít nějaké analogie, ve fyzice jim říkáme modely, mezi chováním objektů v mikrosvětě a v našem běžném světě. Ale ty prostě nejsou dokonalé a někdy jsou zcela zavádějící. A navíc nemáme k dispozici „vidícího" kamaráda, který by naše pokusy o pochopení zákonitostí mikrosvěta mohl usměrňovat či nám s nimi pomoci.

Příroda je prostě taková

S přijetím zcela nového chování objektů mikrosvěta měli problém i věhlasní fyzikové – mezi nejznámější kritiky bývá řazen sám Albert Einstein, který kritizoval zejména pravděpodobnostní charakter měření, který zmíním podrobněji později.

Not only is the Universe stranger than we think, it is stranger than we can think.
Vesmír není jen podivnější, než si myslíme, ale je podivnější, než si dokážeme představit.
Werner Heisenberg

The point is no longer that quantum mechanics is an extraordinarily (and for Einstein unacceptally) peculiar theory, but that the world is an extraordinary peculiar place.
Nejde už o to, že kvantová mechanika je mimořádně (a pro Einsteina nepřijatelně) podivná teorie, ale o to, že svět je mimořádně divné místo.
N. David Mermin

Já, stejně jako většina vysokoškolských i středoškolských učitelů, jsem se s kvantovou fyzikou a fyzikou mikrosvěta jako takovou pořádně potkala až na vysoké škole. V té době jsem jednak měla za sebou vysokoškolské kurzy klasických partií fyziky, ale také jsem již pronikla do určité míry i do filozofického pohledu, který klasická fyzika má na svět kolem nás. A z vlastní zkušenosti mohu říci, že bylo v jistém smyslu těžké odložit tento pohled a začít budovat pohled zcela odlišný. A jak celkem přesně vystihují níže uvedené citáty, za těmito problémy se skrývá náš „předsudek", že v mikrosvětě by se mělo dít to samé, co známe ze světa kolem nás.

The „paradox" is only a conflict between reality and your feeling of what reality „ought to be".
„Paradox" je pouze konflikt mezi realitou a vaším pocitem toho, jaká by realita „měla být".
Richard Feynman

The only failure of quantum theory is its inability to provide a natural framework for our prejudices about the workings of the Universe.
Kvantová teorie selhává jen v tom, že se nedokáže přizpůsobit našim předsudkům o fungování vesmíru.
Wojciech Zurek

To by však mohlo znamenat, že středoškoláci, kteří ještě nemají tak hluboké poznatky z klasické fyziky, ale mají již rozvinuté abstraktní myšlení, které jim umožňuje logické vyvozování nových skutečností z daných zákonitostí, mohou být vlastně v mnohem lepší pozici. Navíc tato generace tráví celkem mnoho svého času ve virtuálních světech počítačových her, kde je možné opravdu ledacos. Možná i proto jim kvantová fyzika, která je tak odlišná od naší každodenní zkušenosti s makroskopickým světem kolem nás, a tedy i od klasické fyziky, může přijít přijatelnější.

Rozvoj výpočetní techniky umožňuje používat i velmi propracované grafické simulace, které plnohodnotně nahradí komplikovaný matematický popis. Některé jsou přístupné i široké veřejnosti a mohou zahrnovat i herní prvky (tzv. gamifikace), čímž jsou ještě atraktivnější. Her, které ve svých mechanismech využívají základní principy kvantového chování, existuje nepřeberné množství a nalezneme mezi nimi i hry, které mají opravdu potenciál celkem nenásilně vybudovat ve svých hráčích „vnitřní představu až intuici" toho, jak se objekty v mikrosvětě chovají, když na ně uplatňujeme pravidla, která zde platí. Protože s vytvořením zcela nového „grafického" náhledu na působení operátorů na dvoustavový systém pomocí řešení „hlavolamů", jejichž vnitřní princip vycházel z pravidel působení kvantových operátorů [17], mám i svou vlastní zkušenost, nemohu než plně souhlasit s Johnem Preskillem, který uvádí: „*Možná, že děti, které vyrostou s kvantovými hrami, získají intuitivní pochopení kvantových jevů, které naší generaci chybí.*" *(Perhaps kids who grow up playing quantum games will acquire a visceral understanding of quantum phenomena that our generation lacks.)* [18].

Téma „kvantových her" a jejich uplatnitelnosti nejenom ve výuce je velmi široké a zasloužilo by si vlastní článek. Uveďme zde jako takovou „ochutnávku" dva příklady, které se velmi liší svým pojetím. Prvním je propracované prostředí Quantum Flyptrap [19], které jednak umožňuje vlastní zcela volné zkoumání různých experimentů spadajících do kvantové optiky, ale kromě toho obsahuje i sek-



Obr. 1 Kvantové piškvorky v „nepočítačovém" provedení na kurzu pro učitele.

venci připravených úkolů, jejichž řešením se uživatel postupně seznamuje nejenom s prostředím samotným, ale také s pravidly, která v kvantovém světě platí. Zcela odlišné jsou kvantové piškvorky [20], které jsou velmi jednoduché, časově nenáročné (a díky tomu použitelné dobře i ve výuce, viz obr. 1) a dobře zachycují princip superpozice a vlastnosti měření v kvantové fyzice.

Experiment je naším pevným bodem

V předchozích odstavcích uvádím, že chování kvantových objektů je často naprosto nezvyklé, nečekané a velmi obtížně představitelné. Přesto naše situace není zcela bezvýchodná. Stejně jako v jiných částech fyziky se můžeme spolehnout na experiment. Ať už je naše teorie (model) jakkoli fádní či extravagantní, musí umět předpovídat nějaké měřitelné důsledky. A právě jen experiment rozhodne, zda ji máme používat dál, protože by na ní mohlo být zrníčko pravdy, nebo je třeba ji opustit, protože chování částic nepopisuje správně.

It doesn't matter how beautiful your theory is, it doesn't matter how smart you are. If it doesn't agree with experiment, it's wrong.
Nezáleží na tom, jak krásná je vaše teorie, nezáleží na tom, jak jste chytří. Pokud nesouhlasí s experimentem, je špatně.
Richard Feynman

Chování objektů v mikrosvětě bylo natolik překvapivé a divné, že bylo testováno mnoha velmi přesnými experimenty. Dokonce se o kvantové teorii někdy říká, že je jednou z nejlépe experimentálně testovaných teorií. Jako příklad této přesnosti lze uvést třeba měření magnetického momentu elektronu, jehož hodnotu v 30. letech minulého století předpověděla Diracova rovnice (rovnice relativistické kvantové mechaniky). Podle ní měl být magnetický moment elektronu μ_e přesně roven μ_B

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9{,}274\,010\,065\,7 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{J/T}\,.$$

Konstantu μ_B nazýváme Bohrův magneton. Přesnější měření ve 40. letech ukázala, že tato hodnota je nepatrně vyšší, ale ve stejné době byl dostupný také přesnější výpočet provedený v rámci kvantové teorie pole (konkrétně kvantové elektrodynamiky). Od té doby došlo k dalšímu zpřesnění jak výpočtu (ten je prováděn numericky a je velmi výpočetně náročný), tak k uskutečnění přesnějších měření. Porovnáním hodnot z nedávné doby

- předpověď/výpočet [21]:
  $\mu_e = 1{,}001\,159\,652\,181\,1\ (24)\ \mu_B$
- experiment [22]:
  $\mu_e = 1{,}001\,159\,652\,180\,59\ (13)\ \mu_B$

zjistíme, že obě hodnoty se shodují na dvanáct platných míst, což je ve fyzice celkem nevídaná přesnost.

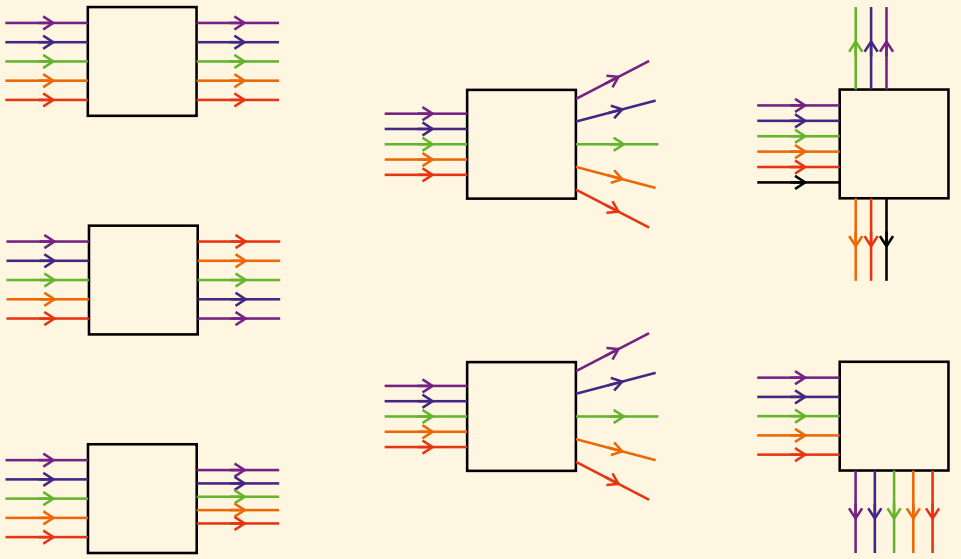
V dalším textu ještě zmíním dva další původně myšlenkové experimenty (v dnešní době již experimentálně ověřené), ve kterých se projeví podivné chování elektronů v plné síle. Jde o dvojštěrbinový experiment a tzv. strašidelné působení na dálku (*spooky action in distance*) u propletených částic. Oba experimenty již byly i reálně provedeny a výsledky plně souhlasily s předpovědí, kterou kvantová teorie dala.

Nemáme vhodná slova

Dalším problémem, na který budeme narážet, je nedostatek vhodných slov, jimiž bychom nezvyklé chování objektů v mikrosvětě popsali. Uvědomme si, jak vznikala artikulovaná řeč. Postupně jednotlivé skřeky

Aktivita s černými skříňkami

Přijmout myšlenku, že v mikrosvětě je nám zapovězeno přímé pozorování a experiment slouží jako „arbitr správnosti", je pro studenty ze začátku obtížné, protože v předchozích partiích – zejména v mechanice, ale i v dalších, se mohli spolehnout „na to, co vidí". K lepšímu pochopení nepřímé povahy pozorování a jeho důsledků výborně poslouží následující aktivita. Nejprve studenti vyřeší optické černé skříňky, jejichž příklady jsou na obrázku. I když nedostanou žádná omezení či jiné instrukce, studenti vždy uvedou velmi jednoduchá a očekávaná řešení, skládající se z jednoho či dvou zrcadel, jedné či dvou čoček.



Když tuto část studenti dokončí, porovnají si řešení, případně rozebereme další možnosti, vyzveme je, aby stejné černé skříňky vyřešili ještě jednou (dostanou nové, nevyplněné zadání), ale tentokrát opravdu popustili uzdu své fantazie a hledali co nejkreativnější („nejujetější“) řešení. Po chvíli váhání se začnou nejprve objevovat řešení celkem umírněná – každý paprsek má svoje malé zrcátko, které ho navede správným směrem, optická vlákna, která uvnitř propojují vstup a výstup, či „želé“ s vhodně proměnným indexem lomu, takže dokáže nasměrovat paprsky do požadovaných směrů. Nakonec se ale osmělí a objeví se řešení obsahující chobotnici s mnoha zrcátky v chapadlech, trpaslíky odpalující fotony speciálními pálkami a podobné.

Ale nejdůležitější na celé aktivitě je závěrečná diskuze, která by měla vést k závěru, že pokud máme k dispozici jen zadané paprsky a nemůžeme se podívat dovnitř „krabice“, tak jsou všechna řešení, která dávají zadané výsledky, stejně možná, ať už obsahují dvě optické čočky, nebo chobotnici. Rozhodnout by mohl nějaký jiný experiment – posvítíme mezi paprsky, nebo zcela z jiného směru, pokud je to možné, zaklepeme s krabicí, použijeme magnet, … Cokoli, co nás napadne. A důležité je, že i když naše řešení „zvládne“ i tyto další experimenty, tak stejně nikdy nemáme úplnou jistotu, že popisuje „vnitřek černé krabice“ správně.

a zvuky dostávaly konkrétní význam, postupně se vyvíjela slova pro jednotlivé konkrétní věci a děje kolem nás, potom i pro věci abstraktnější. Trvalo to několik desítek tisíc let, než se řeč vyvinula tak, aby Shakespeare mohl napsat svoje sonety. Vše se však odvíjelo od potřeby pojmenovávat a popisovat svět kolem nás. Teď jsme se dostali do situace, kdy potřebujeme mluvit o světě, ve kterém se věci chovají naprosto odlišně od toho, jak se chovají předměty, s nimiž máme přímou zkušenost. Mají neočekávané a často zcela paradoxní vlastnosti. Jako příklad nám může posloužit elektron v excitovaném stavu atomu vodíku (viz následující rámeček).

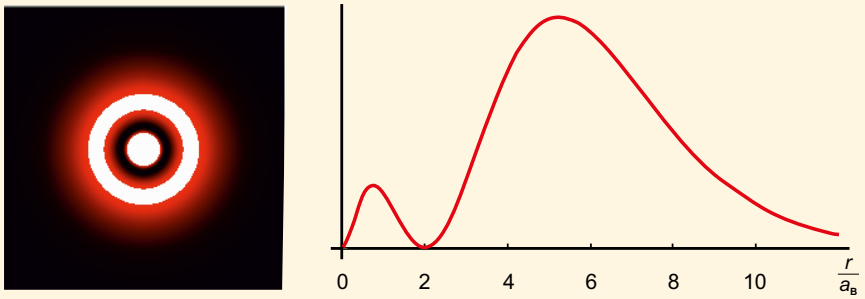
Elektron v atomu vodíku

Jako příklad obtíží, do kterých se můžeme dostat při použití slovního popisu chování mikroobjektů, si vezměme elektron v atomu vodíku. Když řekneme, že elektron obíhá atomové jádro, tak si většina lidí představí něco jako obíhání planet kolem Slunce. Takto si to představoval třeba i Bohr ve svém modelu. Dnes již však víme, že toto je velmi daleko od skutečnosti. Například v základním stavu má elektron nenulovou energii, ale nulový celkový moment hybnosti. V klasické fyzice bychom z druhé z těchto hodnot mohli udělat závěr, že pokud se nejedná o nějaký komplikovaný pohyb, kde by ta nulovost byla jen důsledkem středování hodnoty, tak je elektron v klidu nebo se pohybuje přímočaře od středu či ke středu atomu.

Pokud se omezíme na prosté konstatování, že elektron v atomu prostě někde je, vyskytuje se tam, tak bohužel v části posluchačů vyvoláme dojem, že je nehybný, nebo téměř nehybný, což také není dobrá představa.

Můžeme zkusit vylepšit představu pohybujícího se elektronu třeba tak, že dodáme nějaký širší popis a vyvoláme dojem, že se elektron pohybuje v okolí jádra nějak mnohem složitěji, například i s prvky chaotičnosti. Naši posluchači nejspíše budou pracovat s představou, že si tam elektron poletuje podobně jako moucha v místnosti. A jeho poletování klidně může mít takový charakter, aby pravděpodobnost jeho zachycení v různých místech elektronového obalu odpovídala hustotě pravděpodobnosti nalezení, kterou v rámci kvantové fyziky umíme spočítat. Za takovou mouchou ale můžeme kreslit či si jen myslet „čáru“, tj. trajektorii, po níž se pohybuje.

Představa trajektorie pohybující se částice je však díky relacím neurčitosti v kvantové fyzice neudržitelná. Podívejme se na elektron v prvním excitovaném stavu atomu vodíku a představme si, že nějakým způsobem měříme jeho polohu, nebo alespoň jeho vzdálenost od jádra. Na obrázku 2 vlevo je barvou naznačena tzv. bodová pravděpodobnost nalezení elektronu v bodech roviny procházející středem atomu vodíku, jestliže se elektron nachází v 2s stavu. Graf, který je zakreslen vpravo na obr. 2, zachycuje závislost pravděpodobnosti nalezení elektronu na vzdálenosti od středu atomu, tj. radiální hustotu pravděpodobnosti, která zohledňuje skutečnost, že s rostoucí vzdáleností od jádra se také „zvětšuje prostor“, kde má elektron danou vzdálenost od jádra (jde o povrch koule s příslušným poloměrem). Z tohoto grafu zjistíme, že je velmi pravděpodobné elektron najít kdekoli v kulové slupce o poloměru $a_B = 0{,}5$ nm (tzv. a_B je Bohrův poloměr) a v kulové slupce o poloměru asi $5{,}2a_B$; pravděpodobnost nalezení elektronu na dané vzdálenosti má pro tyto dvě hodnoty lokální maxima. Je však zcela vyloučeno (pravděpodobnost je nulová), že bychom elektron našli ve vzdálenosti $2a_B$ (tj. v kulové slupce o tomto poloměru). Elektron tedy můžeme najít ve dvou různých oblastech, které jsou odděleny místy, kde jej nenajdeme nikdy. Ale jak se dostane z jedné oblasti do druhé, když nemůže nikdy být mezi nimi?



Obr. 2 Bodová a radiální hustota pravděpodobnosti elektronu ve stavu 2s v atomu vodíku. Grafy byly vytvořeny pomocí programů z projektu Hrajeme si s orbitaly [23].

In quantum mechanics, we often say that a particle can be two places at once. It is more precise to say that there are situations when a particle may not have a location at all. Which is deeply weird.

V kvantové mechanice často říkáme, že částice může být na dvou místech současně. Přesnější je ale říci, že existují situace, kdy částice nemusí mít žádnou určitou polohu. A to je opravdu podivné.

Brian Greene

Divné, že? Tím zcela padá jakákoli představa, že by bylo možné kreslit trajektorii jako v klasické fyzice.

O existenci (mikro)světa, který se řídí pravidly kvantové fyziky, víme asi sto let. Navíc je tento svět zcela nepřístupný našemu přímému zkoumání. Máme o něm zprávy jen nepřímé – z různých měřicích přístrojů –, jde tedy o naše interpretace naměřených údajů. Z těchto důvodů jsme nuceni pro popis vlastností a chování objektů v mikrosvětě používat slova, kterými běžně popisujeme svět kolem nás, protože jinou řeč (kromě složité matematiky, jež je ovšem srozumitelná pouze těm, co vložili mnoho času a úsilí do toho, aby se ji naučili) nemáme. A když běžná slova použijeme pro popis chování částic v mikrosvětě, tak si přirozeně představíme, že se tyto částice chovají stejně jako předměty z našeho okolí, které bychom těmito slovy popisovali. A to může být velmi zavádějící.

We must be clear that when it comes to atoms, language can be used only as in poetry.

Musíme si uvědomit, že pokud jde o atomy, jazyk lze použít pouze jen jako v poezii.

Niels Bohr

Nezbývá nám než se opírat o logiku, resp. o matematický popis, který se zdá být úspěšný v popisu, ale i předpovídání výsledků měření v mikrosvětě, a jeho výsledky, bez ohledu na to, jak bizarní se nám zdají, přijímat jako správné.

I think that modern physics has definitely decided in favor of Plato. In fact, the smallest units of matter are not physical objects in the ordinary sense; they are forms, ideas which can be expressed unambiguously only in mathematical language.

Myslím, že moderní fyzika se definitivně přiklonila k Platónovi. Ve skutečnosti nejmenší jednotky hmoty nejsou fyzikálními objekty v běžném slova smyslu; jsou to formy, ideje, které lze jednoznačně vyjádřit pouze matematickým jazykem.

Werner Heisenberg

Vlna, nebo částice? Vlna i částice!

Dalším příkladem podivného chování, na který se v tomto textu zaměřím, bude tzv. vlnově-korpuskulární dualismus. Vezmu to tentokrát trochu historicky – tak jak se o tom nejčastěji bavím se studenty. Na konci 19. století se zdálo, že je celkem jasná hranice mezi „spojitými“ vlnami, které reprezentovaly světlo či zvuk[3], a „diskrétními“ kuličkami (či přesněji hmotnými body), které dobře popisovaly pohyb malých předmětů

Můžeme zkusit vyjádření, že „se elektron vyskytuje v okolí jádra“, ale musíme tím říci, že to neznamená, že tam „někde sedí na jednom místě“, ale že se tím snažíme vyjádřit skutečnost, že když ho budeme hledat, tak ho v okolí jádra někde najdeme.

S ohledem na kvantověmechanický model s jeho hustotou pravděpodobnosti nalezení elektronu v okolí jádra se objevují popisy, jako že je elektron rozmáznutý v prostoru atomového obalu (jako kdyby byl z plastelíny) či že jde o jakousi elektronovou „mlhovinu“ či „mračna“, která jsou někde hustší a někde řidší.

v místnosti, ale třeba také planet kolem Slunce. Než se pustím do popisu toho, jak je to v mikrosvětě, shrňme si základní charakteristiky obou těchto modelů.

Vlna není na jednom určitém místě (v jednom bodě), ale v nějaké části prostoru, postupně se šíří, její energie je v celém tomto prostoru „rozprostřena“. Okolí předává energii na celém rozhraní, kam dopadá. Dvě vlny mohou interferovat, tj. skládat se tak, že na některých místech se „sečtou“ (složená vlna je silnější), ale na jiných se „odečtou“ (navzájem zruší svoje účinky). Kromě interference lze také pozorovat ohyb (difrakci) vlnění. Pro šíření používáme Huygensův princip. Ale nesmíme zapomínat, že kromě energie vlna přenáší i hybnost, opět „rozprostřeně“.

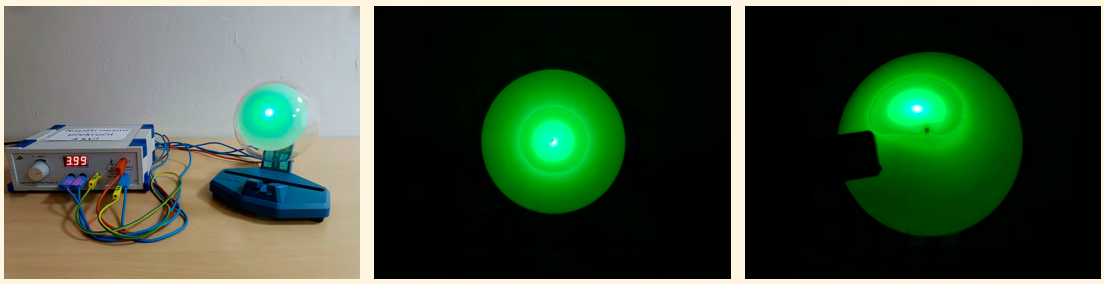
Hmotný bod je v zadaném čase na jednom konkrétním místě (bodě prostoru). Má energii a hybnost, která je však také „lokalizovaná“, stejně jako poloha hmotného bodu. Můžeme za ním malovat čáru, kudy se pohyboval, tzv. trajektorii, a tento pohyb si i předem spočítat – pokud známe síly, které na něj působí, a jeho počáteční polohu a hybnost. Dopadají vždy jen na jedno určité místo, kde předají svoji energii a hybnost. Nedochází u nich k interferenci či ohybu.

Před další diskuzí se mi osvědčilo studentům experimentálně připomenout interferenci jako vlastnost, podle které poznám, že jde o vlnění. U vln na vodní hladině lze použít vhodnou velkou nádobu nebo video, např. [24]. Pokud zapnete na dvou telefonech tón se stejnou frekvencí pomocí tónového generátoru (např. v rámci aplikace PhyPhox [25]), mohou studenti slyšet, že zvuk z těchto dvou zdrojů interferuje, protože při pohybu po místnosti najdou místa, kde je zvuk hlasitější, a místa, kde je tišší. U zvukového vlnění je názorné i poukázat na skutečnost, že nedopadá na jedno místo, například výzvou, aby studenti „ukázali“, kam přesně na zadní stěnu učebny dopadá zvukové vlnění, které vydávají hlasivky vyučujícího. Na konec si obvykle předvedeme i klasický dvouštěrbinový experiment se světlem (pokud není k dispozici žádné vybavení, lze to předvést i jen pomocí běžného laserového ukazovátka a tří tuh do mikrotužky [26]).

Jak bylo řečeno, na konci 19. století bylo světlo jednoznačně vlnění. V roce 1900 Max Planck a v roce 1905 Albert Einstein přišli s tím, že pokud mají vysvětlit, jak je světlo vyzařováno, resp. pohlcováno látkou, je třeba připustit myšlenku, že se tak děje vždy po nějakých malých kousíčcích s přesně danou energií. Zatím bylo stále možné se domnívat, že se světlo šíří jako vlna. Když však Arthur Compton provedl v roce 1922 experiment, který prokázal, že tyto kousíčky energie záření nesou kromě energie také hybnost, stejně jako hmot-

3 Jako příklad uvádím i vlny na vodní hladině, i když s komentářem, že s nimi to není tak jednoduché, jak se na první pohled zdá, protože nedochází pouze ke zdvihu a poklesu vody u hladiny, ale k poměrně komplikovanému pohybu. Jejich výhodou je, že jsou dobře viditelné.

Ohyb (difrakci) elektronů na polykrystalu lze i ve školních podmínkách ukázat např. pomocí demonstrační soupravy od firmy 3B Scientific [27] – viz obr. 3. Při tomto demonstračním experimentu se však projevilo jako zcela klíčové ukázat, že difrakční kroužky, které na stínítku vznikly, je možné deformovat pomocí magnetu. Nemůže tedy jít o zelené světlo, ale jde opravdu o elektrony, které svým dopadem způsobují zelené světélkování stínítka.



Obr. 3 Fotografie demonstrační soupravy pro difrakci elektronů na polykrystalu grafitu (vlevo), dva difrakční kroužky viditelné na stínítku (uprostřed) a stejné difrakční kroužky deformované pomocí magnetu (vpravo).

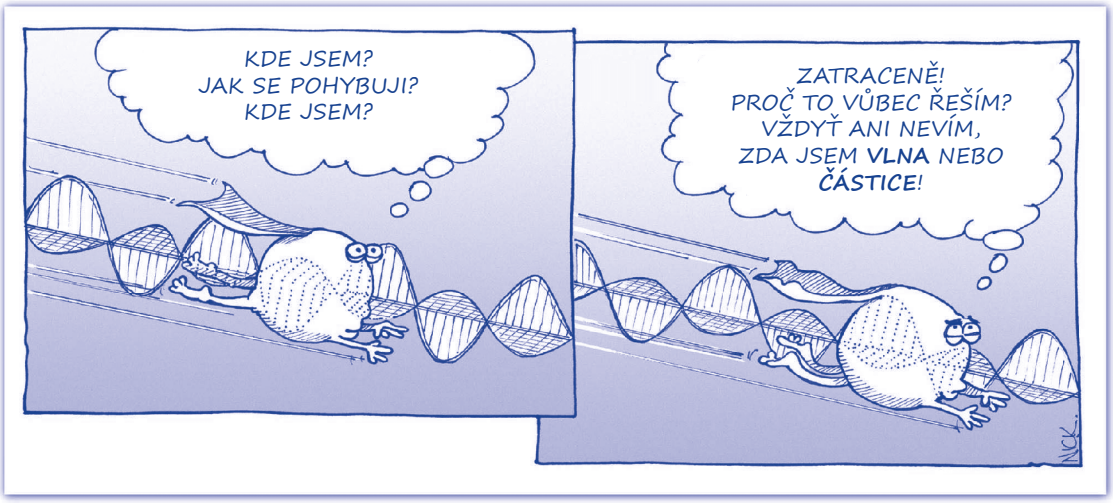
né body, byl již krůček k myšlence, že by světlo mohlo být proudem jakýchsi „kuliček“, později nazvaných fotony. Protože však světlo stále interferovalo a také se ohýbalo, nezbylo nic jiného než přijmout oba pohledy na světlo – vlnový i „kuličkový“.

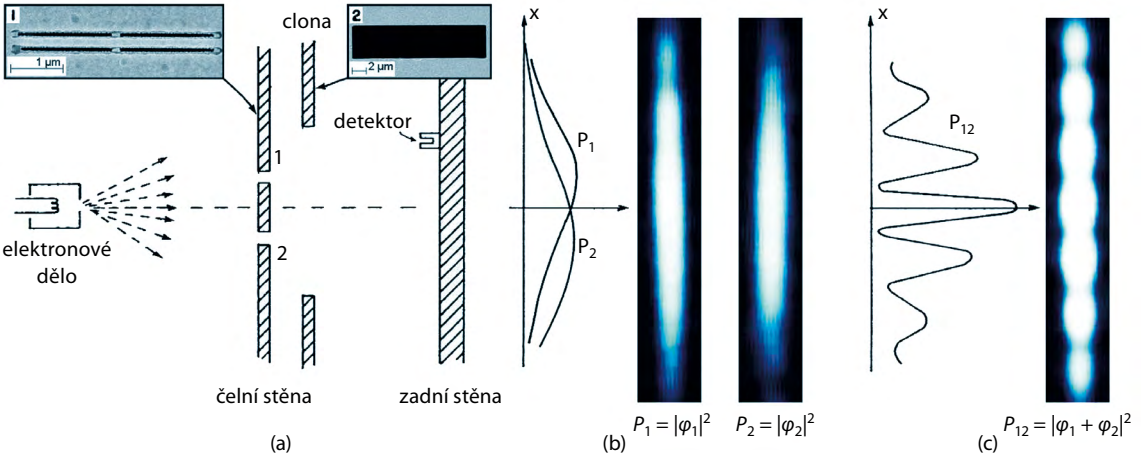
Na druhou stranu na začátku dvacátého století byl elektron poctivá „kulička“ – když jsme ho popisovali jako hmotný bod, tak jsme dokázali uspokojivě vysvětlit jeho pozorované chování. Přesto taková „nesymetrie“ neunikla pozornosti fyziků a v roce 1924 Luis de Broglie ve své dizertační práci uvedl, že když světlo (původně vlna) získalo i vlastnosti typické pro hmotné body (kuličky), mohl by i elektron (původně hmotný bod) mít vlnové vlastnosti. A rovnou i uvedl vzorec udávající jeho vlnovou délku. Zhruba o tři roky později se podařilo Johnu Pagetovi Thomsonovi, Clintonu Josephu Davissonovi a Lesteru Germerovi tuto hypotézu experimentálně ověřit pozorováním ohybu elektronů na krystalu. Takže i pro popis elektronů jsou třeba oba uvedené pohledy.

Chovají se tedy elektrony jako vlny, nebo jako částice? Nebo obojí? Studenti se pravděpodobně rozesmějí, když jako odpověď na tuto otázku budeme velmi důrazně tvrdit, že elektron se chová vždycky jako elektron a foton se chová vždy jako foton. A je třeba dodat, že jejich chování v některých případech připomíná chování kuliček (hmotných bodů) či chování vln (mluvíme o tzv. korpuskulárně-vlnovém dualismu). Vyžaduje to určitou zkušenost a praxi, abychom dokázali rozhodnout, kdy použít který pohled. Na druhou stranu existuje mnoho situací, kdy se elektrony či fotony nechovají ani jako kuličky, ani jako vlny. Kvantová fyzika však jejich chování dokáže popsat velmi přesně a vystihnout i tuto „dvojí povahu“.

Rozšiřující poznámka: V předchozím výkladu je pro vlnění použit převážně model rovinné vlny. Ale i vlnění může být prostorově omezené (lokalizované). Například když tlesknu či klepnu dvěma kovovými tyčkami o sebe, tak se vytvořený zvuk šíří prostorem také jako jakýsi „balíček“ (můžeme díky tomu měřit rychlost šíření zvuku či po jeho odrazu od vzdálené překážky slyšet ozvěnu). Mluvíme o tzv. vlnovém balíku a jeho matematický popis odpovídá tomu, jak popisujeme v kvantové fyzice objekt, který je lokalizován v určité části prostoru (částice), ale zároveň má i vlnové vlastnosti.

Uveďme jako ilustrativní příklad tohoto duálního chování velmi známý dvojštěrbinový experiment (detailní rozbor lze nalézt v [28]). Tento experiment byl původně proveden o mnoho let dříve se světlem, ale jeho výsledek je stejný i v případě, že místo světla použijeme elektrony (případně atomy, či dokonce molekuly). Tento experiment ve školních podmínkách provést nelze, ale je ho možné velmi dobře předvést pomocí vhodného apletu či simulace, např. [29]. Elektrony procházejí přes přepážku, ve které jsou dvě štěrbiny, šířka štěrbin i jejich vzdálenost mají rozměry srovnatelné s vlnovou délkou odpovídající energii použitých elektronů. Elektrony dopadají na scintilační stínítko (zobrazují se na monitoru) a zaznamenáváme si místa jejich dopadu. Když vyšleme v apletu jeden elektron,





Obr. 4 Zjednodušený nákres principu experimentu (a), doplněný o výsledky reálného měření (v nepravých barvách) při jedné otevřené štěrbině (b) a při obou otevřených štěrbinách (c). *Obrázek je převzat z [30]*

vidíme, že každý elektron dopadne právě na jedno konkrétní místo – jeho chování tedy odpovídá kuličce. Když však necháme na stínítko dopadnout mnoho elektronů, zjistíme, že nedostaneme dvě místa, za každou štěrbinou jedno, kam by dopadlo mnoho elektronů, jak by odpovídalo chování kuliček, ale na stínítku dostaneme střídající se proužky, kam dopadlo mnoho a kam dopadlo velmi málo elektronů. Získaný obrázek (viz obr. 4) přesně odpovídá interferenčnímu obrazci, který po průchodu dvojštěrbinou vytvoří vlnění. Takže již pouhý dopad elektronu na stínítko v tomto experimentu v sobě míchá chování podobné kuličkám i vlnám.

A ještě drobná poznámka k významu slova částice. Před lety na tento problém upozornil doc. A. Lacina. Značný zmatek v myslích začátečníků může působit i skutečnost, že slovo „částice“ se používá ve dvou významech. Jednak pro objekt mikrosvěta, jako je elektron či foton, jehož chování popisuje kvantová fyzika, a jednak se při diskusi právě uvedeného duálního chování slovo „částice“ používá pro něco, co se chová pouze jako hmotný bod, resp. malá kulička, tj. klasický objekt. Například věta „elektron je částice, která má částicový i vlnový charakter“, je moc pěkným příkladem smíchání obou významů. I proto v tomto textu používám výhradně termín korpuskulárně-vlnový dualismus či se odkazuji na „kuličkové“ chování ve smyslu chování jako hmotný bod v klasické fyzice.



Na druhou stranu už ve školce se učíme, že týden má sedm dní a každý den se dělí na dvě části. Tu, ve které je venku tma a říkáme jí noc, a druhou, kdy venku svítí sluníčko a říkáme jí den. Podobně se každý horkovzdušný balon skládá z koše pro lidi (náklad) a balonu. Jazyk nebývá vždy striktně logický.

Závěr

Zjistili jsme, že kvantové částice se chovají opravdu divně. Jsou na více místech současně nebo nejsou nikde nebo jsou všude zároveň, jako když se někde šíří vlnění – není to vůbec jasné. Při slovním popisu narážíme na to, že běžný jazyk nemá slova, která by výstižně popsala dění v mikrosvětě. A navíc se nemůžeme spolehnout ani na naši každodenní zkušenost.

A to ještě není vše – ve druhé části se budeme věnovat dalším podivnostem. Například princip superpozice a s ním propojené vlastnosti kvantového měření se nepodobají vůbec ničemu, co známe z našeho běžného světa. Zjistíme, že když se na takovou kvantovou částici „podíváme“, tak se celý obrázek změní. Takže nemá moc smysl se ptát, jaký je obrázek, když se nedíváme, i když zrovna to by nás asi velmi zajímalo. Témata k rozmyšlení nabídne i principiální nerozlišitelnost stejných částic a stručně zmíněné kvantové provázání stavů (*entanglement*).

Literatura

[1] *IYQ 2025*. [cit. 18. 2. 2025]. Dostupné z: https://quantum2025.org/

[2] G. Gamow: *Pan Tompkins v říši divů*. Mladá fronta, Praha 1986. ISBN 23-024-86.

[3] T. Hey a P. Walters: *Nový kvantový vesmír*. Argo/Dokořán, Praha 2005. ISBN: 80-7203-699-8.

[4] C. Orzel: *Jak naučit svého psa fyziku*. Argo, Praha 2011. ISBN: 978-80-257-0388-5.

[5] P. Kulhánek: *Proklaté kvantové skoky*. AGA, Praha 2023. ISBN 978-80-906638-9-3.

[6] *The Quantum Flagship*. [cit. 18. 2. 2025]. Dostupné z: https://qt.eu/

[7] *Quantum Technology Education (QTEd)*. [cit. 18. 2. 2025]. Dostupné z: https://qtedu.eu/

[8] GIREP: *Teaching and Learning Quantum Physics*. Thematic group. [cit. 18. 2. 2025]. Dostupné z: https://www.girep.org/thematic-groups/teaching-and-learning-quantum-physics/

[9] B. Bungum et al.: ReleQuant – Improving teaching and learning in quantum physics through educational design

research. *Nordic Studies in Science Education* **11**(2), 153 (2015).

[10] A. Russo and D. P. Adorno: An inquiry-based learning path to introduce modern physics in high-school. *J. Phys.: Conference Series* **1076**, 012007(2018).

[11] H. K. E. Stadermann, E. van den Berg, M. J. Goedhart: Analysis of secondary school quantum physics curricula of 15 different countries: Different perspectives on a challenging topic. *Physical Review Physics Education Research* **15**, 010130 (2019).

[12] J. Legerská: Teaching Quantum Physics on a High School Level. In: *WDS'23 Proceedings of Contributed Papers – Physics* (Ed. J. Šafránková a J. Pavlů). Matfyzpress, Prague 2023, s. 171–177.

[13] M. Kaku: *Kvantová revoluce. Jak kvantové počítače změní svět*. Prostor, Praha 2024. ISBN: 978-80-7260-592-7.

[14] McKinsey: *The Quantum Technology Monitor*. Přehledová zpráva. [cit. 18. 2. 2025]. Dostupné z: https://www.mckinsey.com/featured-insights/the-rise-of-quantum-computing

[15] A. Weir: *Spasitel*. Laser-books, Praha 2021. ISBN: 978-80--242-7678-6.

[16] J. Jarošová: *Via Lucis*. Práh, Praha 2009. ISBN 978-80--7252-259-0.

[17] *Quantum Odyssey*. [cit. 18. 2. 2025]. Dostupné z: https://www.quarksinteractive.com/quantum-odyssey

[18] J. Preskill. Quantum computing in the NISQ era and beyond. *Quantum*. **2**, 79 (2018).

[19] *Quantum Flytrap*. [cit. 18. 2. 2025]. Dostupné z: https://quantumflytrap.com/

[20] E. van Nieuwenburg: Introducing a new game: Quantum TiqTaqToe. *Quantum Frontiers*. Blog post, posted on July 15, 2019. [cit. 18. 2. 2025]. Dostupné z: https://quantum-frontiers.com/2019/07/15/tiqtaqtoe/

[21] The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty. *2022 CODATA Value: electron magnetic moment*. NIST. [cit. 18. 12. 2025]. Dostupné z: https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?muem

[22] X. Fan et al.: Measurement of the electron magnetic moment. *Physical Review Letters* **130**(7), 071801 (2023).

[23] Z. Broklová, J. Koupil: *Hrajeme si s orbitaly*. [cit. 18. 2. 2025]. Dostupné z: http://kdf.mff.cuni.cz/~koupilova/orbitals/?lang=CZ

[24] *Wave interference exam*ple [video]. [cit. 18. 2. 2025]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=kPe1z-4GC1uU

[25] *Aplikace phyphox* (physical phone experiment). [cit. 18. 2. 2025]. Dostupné z: https://phyphox.org/

[26] Sbírka fyzikálních pokusů. *Dvojštěrbinový pokus*. [cit. 18. 2. 2025]. Dostupné z: http://fyzikalnipokusy.cz/1658/dvojsterbinovy-pokus

[27] *Demonstrační souprava pro difrakci elektronů na polykrystalu*. [cit. 18. 2. 2025]. Dostupné z: https://www.3b-scientific.com/cz/experiment-electron-diffraction--8000704-ue5010500-230-3b-scientific,p_1435_28842.html

[28] R. P. Feynman, R. B. Leighton a M. Sands: *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady, 1. díl*. Fragment, Praha 2005, kapitola 37. ISBN: 80-7200-405-0.

[29] J. Legerská. *Double slit experiment with electrons* [aplet]. [cit. 18. 2. 2025]. Dostupné z: https://fyzweb.cz/materialy/kvantovka/Double_slit_experiment.html

[30] R. Bach et al.: Controlled double-slit electron diffraction. *New Journal of Physics* **15**(3), 033018 (2013).

